

Inngangur

Árið 1959 var haldið málþing stærðfræðinga, stærðfræðikennara, fólks frá ráðuneytum menntamála og umsjónarmanna kennaramenntunar um nýja hugsun um skólastærðfræði. Málþingið var haldið á vegum OEEC í Royaumeont, Frakklandi. Gerðar voru tillögur um róttækar breytingar á stærðfræðikennslu, þar á meðal reikningi og algebru, jafnvel á fyrstu skólastigum. Í framhaldi var sett á laggirnar norræn nefnd um nútímavæðingu stærðfræðikennslu, *Nordiska kommittén for modernisering af matematikundervisningen*, skammstafað NKMM. Nefndin lét rita drög að námskrám og námsefni í stærðfræði sem síðan mætti þýða á ólík norræn tungumál. Meðal þess var námsefni, samið af Agnete Bundgaard og Eeva Kytä, sem var þýtt á íslensku fyrir barnaskólastig (samsvarandi yngsta stigi og miðstigi í núverandi skólakerfi).

Hér á eftir eru metnar þær breytingar sem urðu á námsefni í reikningi fyrir barnaskóla á Íslandi fyrir áhrif Royaumeont-málþingsins og kannað hverjar þeirra festust í sessi. Inntak NKMM-námsefnisins fyrir barnaskólastig, Bundgaard-bókanna svonefndu, er greint með hliðsjón af tillögum sem komu fram á málþinginu í Royaumeont og borið saman við efni eldri og yngri íslenskra kennslubóka til að draga fram áhrif málþingsins á íslenska reikningskennslu.

Reikniadgerðirnar fjórar: samlagning, frádráttur, margföldun og deiling, voru og eru megininntak námsefnis í stærðfræði á barnaskólastigi samkvæmt lögum og námskrám. Með Bundgaard-bókunum bættust nýir námsþættir við námsefnið sem nánar er gerð grein fyrir. Enn fremur voru notaðar aðrar aðferðir við uppsetningu reikningsdæma í Bundgaard-bókunum en notaðar höfðu verið í eldri kennslubókum. Þær ollu töluverðu umróti (Anna Kristjánsdóttir, 1996) en voru ekki til komnar fyrir áhrif Royaumeont-málþingsins og eru ekki ræddar í þessari grein. Umræður á opinberum vettvangi á Íslandi um innleiðingu nýju stærðfræðinnar snerust að miklu leyti um nýju reikniadferðirnar. Höfundur þessarar greinar hefur fjallað um umræðurnar í sérstakri grein (Kristín Bjarnadóttir, 2011).

Einnig hefur áður verið fjallað um menntapolítískar ástæður þess að farið var í námsefnisbreytingar (Kristín Bjarnadóttir, 2012). Þar er greint frá erlendum umbótahreyfingum á sviði stærðfræðikennslu og hvernig bergmál þeirra barst til Íslands, fyrst og fremst fyrir persónuleg tengsl einstakra manna. Þar er gerð grein fyrir ferli innleiðingar nýs námsefnis á öllum skólastigum á Íslandi en einstakir námsþættir ekki greindir eins og hér er gert. Enn fremur er ferli innleiðingarinnar á Íslandi borið þar saman við það sem gerðist í nágrannalöndunum Noregi og Danmörku.

Oft hefur verið spurt hvað hafi verið að eldri kennslubókum sem varð til þess að ráðist var í breytingar. Því er til að svara að *Reikningsbók* eftir Elías Bjarnason (1927–1929; e.d.), sem þá var ein í boði fyrir reikningskennslu 9–12 ára barna, var orðin um fjögurra áratuga gömul að stofni til. Efni bókarinnar vísaði til þjóðfélags sem börn þekktu ekki (Kristín Bjarnadóttir, 2013). Endurnýjun þótti því tímabær (Jónas B. Jónsson, munnleg heimild, 24. mars 2002).

Vandi innleiðingar á nýju efni fólst í því að Bundgaard-kennslubækurnar, sem urðu fyrir valinu, voru aðeins tilbúnar í lokaútgáfu fyrir fyrsta árið og í drögum fyrir næstu tvö ár. Enginn vissi hvernig bækurnar mundu þróast eftir að komið væri fram á fjórða námsár. Hugmyndum um breytingar var þó tekið fagnandi af skólastjórnendum á kynningu eftir fyrsta námsárið, 1966–1967. Þá hafði efnið verið kennt í sjö bekkjum í tveimur skólum í tilraunaskyni. Næsta skólaár var það tekið upp í öllum bekkjum í mörgum skólum (Kristinn Gíslason, 1978).

Samkvæmt upplýsingum frá Menntamálaráðuneytinu, skólarannsóknadeild (1977), luku um 40% árganga nemenda, sem fæddir voru á árunum 1962–1965, sex ára námi byggðu á nýju kennslubókunum. Allstór hluti næstu árganga á undan og eftir lásu einnig þessar kennslubækur. Gera má því ráð fyrir að um tíu þúsund manns sem nú eru á sextugsaldri, fólk fætt á árunum 1959–1968, hafi notið kennslu samkvæmt Bundgaard-kennslubókunum og kynnst stærðfræðilegum hugtökum og orðaforða sem koma fram í rannsókninni sem hér er lýst.

Rannsóknin

Farið verður yfir tillögur um reikningskennslu í hinni opinberu skýrslu um Royaumont-málþingið um nýja hugsun um stærðfræðimenntun (OEEC, 1961) og kannað að hve miklu leyti tillögurnar endurspeglast í kennslubókunum eftir Agnete Bundgaard og Eevu Kyttä fyrir barnaskólastig.

Rannsóknarspurningar

Spurt er

- hvaða hugmyndir um reikningskennslu, sem komu fram í skýrslu um málþingið í Royaumont, voru innleiddar í námsefni sem samið var fyrir barnaskólastig á vegum NKMM og kennt er við Bundgaard,
- hvort hugmyndirnar hafi verið nýjar á Íslandi og
- hvort þær hafi lifað af fyrstu hrifningarölduna í kjölfar breytinganna og hlotið varanlegan sess í íslenskri skólastærðfræði.

Rannsóknargögn

Kennslubókaflokkur NKMM fyrir 7–12 ára nemendur (Bundgaard og Kyttä, 1967–1968; Bundgaard, 1969a–1972) var þýddur á íslensku á árunum 1966–1971. Til samanburðar við hann eru greindir fjórir flokkar kennslubóka fyrir yngsta stig og miðstig með tilliti til atriða sem nefnd eru í framsögu um reikningskennslu og greint er frá í skýrslunni um málþingið í Royaumont (OEEC, 1961) og í niðurstöðukafla hennar. Bókaflokkarnir fimm eru:

- Reikningsbók I–IV eftir Sigurbjörn Á. Gíslason (1911), SÁG – 4 hefti
- Reikningsbók Elíasar Bjarnasonar (e.d.), EB – 3 hefti
- Stærðfræði – Reikningur 1, 2a, 2b, eftir Bundgaard og Kyttä (1967–1968) og 3a, 3b, 4a, 4b, 5a, 5b, 6, eftir Bundgaard (1969a–1972) – AB – 10 hefti
- Stærðfræði handa grunnskólum 1A–6B (Ragnhildur Bjarnadóttir o.fl., 1971–1977) – RB – 14 hefti
- Stærðfræði fyrir byrjendur: kátt er í Kynjadal (Guðbjörg Pálsdóttir, 1998), Eining 1–6 (Mogensen og Balzer Petersen, 1999–2001), Geisli 1, 2, 3 (Guðbjörg Pálsdóttir, Guðný Helga Gunnarsdóttir, Guðrún Angantýsdóttir og Jónína Vala Kristinsdóttir, 2002–2004) – GP – 11 hefti

Sumum þessara bókaflokka fylgja kennarabækur, vinnuhefti og fleira ítarefni. Þar sem könnuð var kynning efnisatriða einskorðaðist rannsóknin við grunnbækur sem samkvæmt framantöldu teljast vera alls 42 hefti.

Val á kennslubókum miðaðist við notkun á tímabilinu frá árinu 1911 fram til um 2010 eða um aldarlangt skeið. Fyrstu áratugi tímabilsins var völ á fleiri bókum en *Reikningsbók* Sigurbjörns Á. Gíslasonar (1911) en skólaskylda var þá fjögur ár frá tíu ára aldri samkvæmt þágildandi lögum. Þrír flokkar kennslubóka voru löggiltir fyrir íslenska barnaskóla árið 1929 (Helgi Elíasson, 1944, bls. 32): bókaflokkur SÁG, eldri útgáfa af bókaflokknum EB (Elías Bjarnason, 1927–1929) og *Reikningsbók handa alþýðuskólum* eftir Steingrím Arason (1928).

EB-flokkurinn í endurskoðaðri útgáfu var valinn til ókeypis dreifingar í skólum árið 1939 ásamt bók Steingríms Arasonar sem hvarf fljótlega úr dreifingu. EB-flokkurinn var því næstum eingöngu í boði fram til 1967 (Kristín Bjarnadóttir, 2013). Síðar var ekki um annað að velja en bókaflokkana EB, AB, RB og GP, hvern á tilteknum tímabilum sem þó gátu skarast um nokkra hríð. Bókaflokkarnir voru gefnir út af Ríkisútgáfu námsbóka og arftaka hennar, Námsgagnastofnun.

Kennt var um reikniadgerðirnar fjórar í heilum tölum, tugabrotum og almennum brotum í framangreindum bókaflokkum eins og kveðið var á um í gildandi lögum eða námskrám á hverjum tíma. Rannsóknin er athugun á því til hvaða hugtaka og efnisatriða sem nefnd voru í Royaumont var gripið við framsetningu efnisins.

Rannsóknaraðferð

Tekin voru saman hugtök og efnisþættir sem nefnd voru í framsöguerindi Gustave Choquet um reikningskennslu á barnaskólastigi og í niðurstöðukafla skýrslu um málþingið í Royaumont. Síðan var kannað hver þeirra væri að finna í kennslubókaflokkunum fimm.

Royaumont málþingið

Málþing um nýja hugsun um skólastærðfræði sem haldið var í nóvember 1959 markaði tímamót í sögu skólastærðfræði í heiminum. Það er ævinlega kennt við fundarstaðinn, Royaumont í Frakklandi. Málþingið var haldið af hálfu Stofnunar um efnahagssamstarf Evrópuríkja, OEEC, *Organisation for European Economic Co-operation*, forvera Efnahags- og framfarastofnunarinnar, OECD, *Organisation for Economic Co-operation and Development*.

Fulltrúar allra aðildarlanda OEEC nema Portúgals, Spánnar og Íslands sóttu málþingið (OEEC, 1961, bls. 213–220). Þar hittust evrópskir og bandarískir forvígismenn hreyfinga um nýja skólastærðfræði, sem var nefnd vestanhafs *New Math*, ný stærðfræði.

Samtök um endurbætur á stærðfræðikennslu, *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*, CIEAEM (sjá vefsetur CIEAEM, e.d.) áttu einnig áberandi fulltrúa á málþinginu, þar á meðal stærðfræðingana Gustave Choquet (1915–2006) og Jean Dieudonné (1906–1992) sem báðir voru frummælendur. Dieudonné var einn af forvígismönnum samtaka stærðfræðinga sem kenndu sig við Bourbaki og unnu að því að setja alla þekktu stærðfræði fram með samræmdum rithætti og nefndu nútímalega stærðfræði, *mathématique moderne*. Meðal félaga í CIEAEM sem ekki sátu málþingið voru sálfræðingurinn og líffræðingurinn Jean Piaget (1896–1980) og stærðfræðingurinn Hans Freudenthal (1905–1990) (Furinghetti, Menghini, Arzarello og Giacardi, 2008).

Alls sátu málþingið 37 fulltrúar aðildarlanda. Tíu þeirra voru stærðfræðingar við háskóla og þrettán voru framhaldsskólakennarar. Séu þrettán gestafyrirlesarar taldir með voru stærðfræðingar á málþinginu sextán og framhaldsskólakennarar sautján. Aðeins þrír þátttakendur voru sérfræðingar á sviði kennaramenntunar og sjö voru frá ráðuneytum. Umræður snerust að miklu leyti um bilið milli háskólastærðfræði og stærðfræðikennslu í framhaldsskólum sem háskólakennarar, stærðfræðingarnir, töldu að brúa þyrfti (Schubring, 2014b).

Skýrsla um málþingið (OEEC, 1961) var gefin út tveimur árum síðar. Hún greinir misnákvæmlega frá því sem þar kom fram (Schubring, 2014a). Forseti málþingsins, Marshall Stone, sem var þá forseti alþjóðasamtaka um stærðfræðimenntun, *International Commission on Mathematics Instruction*, ICMI, hélt inngangserindi sem birt er í heild sinni í fyrsta kafla skýrslunnar. Stone lagði áherslu á að umbótastarfið þyrfti ekki síður að beinast að undirbúningi sérhæfðs iðnverkafélks en tilvonandi háskólastúdenta, verkfræðinga og vísindamanna. Hann vildi þannig stuðla að stærðfræðimenntun fyrir alla og kallaði eftir rækilegri greiningu á notkun grunnskólastærðfræði í nútímaíðnaði og daglegu lífi almennra borgara sem ætlast væri til að tækju þátt í kosningum og greiddu skatta. Stone lagði áherslu á að stærðfræði mætti ekki vekja andúð barna. Það væri allt of augljóst að barnaskólunum mistækist að draga fram dulda stærðfræðihæfileika og áhuga venjulegra barna. Það væri afar brýnt að ráða bót á þessum vanköntum á stærðfræðikennslu barna. Sem betur færi bentu sálfræðilegar rannsóknir, sérstaklega af hálfu Jean Piaget, á uppeldisfræðilega möguleika sem hingað til hefðu verið óþekktir (OEEC, 1961, bls. 19–29).

Dagskrá málþingsins var síðan skipt í þrjá kafla: Um nýja hugsun um stærðfræði, um nýja hugsun um stærðfræðimenntun, og um það hvernig hrinda mætti endurskoðun á skólastærðfræði í framkvæmd. Stærðfræðimenntun er rædd í þriðja kafla. Þar eru sett fram þrjú menntunarmarkmið um skólastærðfræði sem:

- a) þátt í almennri menntun
- b) undirbúning undir líf og starf
- c) undirbúning undir háskólamenntun.

Reikningskennsla væri grundvöllur að öllu frekara námi í stærðfræði. Gustave Choquet, prófessor í stærðfræði við Háskólann í París VI, ræddi hugmyndir um nýja hugsun í stærðfræðimenntun og lagði fram tillögur um nýja nálgun að kennslu í reikningi. Erindi hans var hið eina um reikningskennslu á barnaskólastigi. Það er birt samandregið í þriðja kafla skýrslunnar (OEEC, 1961, bls. 63–68).

Fimmti kafla skýrslunnar fjallar um samantekt og niðurstöður málþingsins (OEEC, 1961, bls. 105–125). Þrátt fyrir hvatningu Stones til rannsókna og endurbóta á stærðfræðikennslu barna og fyrirætlanir hans um „stærðfræði fyrir alla“, hlaut málflutningur hans ekki stuðning í umræðum á málþinginu og lokaniðurstöðum (Schubring, 2014b).

Svend Bundgaard, prófessor í stærðfræði við Háskólann í Árósum, ræddi um stærðfræðilega hæfni kennara og menntun þeirra en efni erindis hans er ekki getið í skýrslunni (Gert Schubring, tölvupóstur, 19. ágúst 2015). Svend Bundgaard er nefndur hér vegna tengsla hans við NKMM-námsefnið sem tekið var upp í barnaskólum á Íslandi og verður greint hér á eftir.

Minnispunktur voru teknir saman í lok fundarins. Skýrslan er ekki samhljóða þeim, sumt hefur verið aukið en annað dregið saman. Niðurstöður um kennslu í reikningi sem greint er frá í skýrslunni eru þó samhljóða minnispunktunum í höfuðatriðum (OEEC, 1961, bls. 108–110; Schubring, 2014a, bls. 93–94).

Ýmsir hafa ritað um málþingið og áhrif þess, sem voru mikil. Oft er talið að þaðan megi rekja upphafið að stærðfræðimenntun sem fræðigreinin. Furinghetti, Menghini, Arzarello og Giacardi (2008) rituðu ítarlega grein árið 2008 um ný viðfangsefni í stærðfræðimenntun í tilefni af 100 ára afmæli samtaka um stærðfræðimenntun, International Commission on Mathematics Instruction, ICMI. Meðal annarra sem hafa ritað nýlegar greinar eru Kilpatrick (2012), sem ritaði um alþjóðlegu hreyfinguna, og Prytz og Karlberg (2016) um atburði í Svíþjóð. Kristín Bjarnadóttir (2017) hefur skrifað um áhrif málþingsins á námsefni fyrir barnaskóla á Norðurlöndum. Þessi grein fjallar um sama efni með ítarlegri hætti og með tilliti til íslensks samfélags.

Norrænt samstarf

Ein lokaályktana Royaumont-málþingsins var hvatning til þess að einstakar þjóðir tækju að endurskoða stærðfræðikennslu hjá sér í samræmi við aðstæður sínar og þarfir en jafnframt var hvatt til sem mestrar samvinnu milli þjóða (OEEC, 1961, bls. 125). Norrænir þátttakendur á málþinginu ákváðu að efna til samstarfs. Hugmyndin var kynnt fyrir viðkomandi yfirvöldum og Norðurlandaráði, sem tók ákvörðun um að skipa nefnd, *Nordiska kommittén för modernisering av matematikundervisningen*, NKMM. Fjórir nefndarmenn voru tilnefndir frá hverju landanna fjögurra, Danmörku, Finnlandi, Noregi og Svíþjóð. Nefndin var að störfum á árunum 1960–1967. Nefndarmenn voru stærðfræðikennarar í háskólum, framhaldsskólum og grunnskólum. Viðfangsefni nefndarinnar voru að greina stöðu stærðfræðimenntunar í hverju landi, setja fram drög að námskrám og endurskoða þau, og rita tilraunanámsefni fyrir námskeið á öllum skólastigum (Nordisk Råd, 1967b, bls. 16).

Nefndin réð nokkra hópa höfunda til starfa. Megináherslan var á 7.–12. bekk. Ætlunin var að námsefni nefndarinnar yrði hægt að þýða og staðfæra í hverju landi fyrir sig (Gjone, 1983, II. bls. 78–80). Ritun hófst sumarið 1961 og nokkrir textar voru tilbúnir um haustið en aðrir síðar, allt fram til ársins 1966. Nefndin réð einnig sérfræðinga fyrir fyrsta til sjötta bekk. Fyrir valinu urðu Agnete Bundgaard, grunnskólakennari á Friðriksbergi í Kaupmannahöfn, systir Svends Bundgaard prófessors, frummælanda í Royaumont. Agnete og finnsk samstarfskona hennar, Eeva Kyttä, rituðu saman námsefni fyrir fyrsta og annan bekk, sjö og átta ára gamla nemendur, og Agnete ritaði síðan ein námsefni fyrir efri bekki að sjötta bekk meðtöldum. Hvorki Svíar né Norðmenn tóku Bundgaard-kennslubækurnar upp í barnaskólum. Norðmenn þýddu bandarískt efni í tilraunaskyni en notuðu að öðru leyti eldra efni. Svíar sömdu sitt eigið efni sem einnig var reynt í tilraunaskyni (Nordisk Råd, 1967a).

Danir voru meðal þeirra þjóða sem gengu einna lengst í að færa hugmyndir Bourbaki-hópsins inn í háskólanámsefni í stærðfræði en einnig í námsefni framhaldsskóla. Hinn áhrifamikli Svend Bundgaard sagði er hann tók við prófessorsembætti við Háskólann í Árósum árið 1954: „Þessi nýja stærðfræði er nokkuð sem við verðum að taka inn í Danmörku. Við verðum að umbylta allri námsskipaninni og nútímavæða hana.“ Umbótahreyfingin hafði geysimikil áhrif í Danmörku (Karp, 2015). Ekki er ólíklegt að Svend Bundgaard hafi haft áhrif á ritun Agnete systur sinnar fyrir barnaskólastig.

Viðtökur á Íslandi

Guðmundur Arnlaugsson, stærðfræðikennari við Menntaskólann í Reykjavík, sem síðar varð rektor Menntaskólans við Hamrahlíð, var námsstjóri í stærðfræði við Menntamálaráðuneytið á árunum 1964–1966. Guðmundur hafði kynnst Svend Bundgaard á árunum 1933–1936 og 1939–1945 er hann var við nám og störf í Danmörku.

Vorið 1966 ræddu menn á vegum Fræðsluskriststofu Reykjavíkur hvert skyldi stefna í umbótum á stærðfræðikennslu í barnaskólum Reykjavíkur (Kristinn Gíslason, 1978). Þá bar Guðmundur fregnir um námsefni NKMM, ritað af Agnete Bundgaard, sem Svend Bundgaard mun hafa sagt honum frá, en Íslendingar voru ekki aðilar að NKMM-samstarfinu. Gylfi Þ. Gíslason, sem var ráðherra menntamála og efnahagsmála á árunum 1956–1971, fylgdist vel með umsvifum OEEC, síðar OECD, á sviði menntamála. Hann sá til þess að endurskoðun yrði hafin á menntakerfinu, þar með talinni stærðfræðikennslu. Hann treysti Guðmundi til að hafa forystu um breytingar á menntakerfinu, til dæmis í Menntaskólanum við Hamrahlíð, en hann hafði síðar efasemdir um nýju stærðfræðina (Gylfi Þ. Gíslason, munnleg heimild, 17. janúar 2002).

Þegar var hafist handa við að þýða Bundgaard-bókaflokkinn sem þá hafði aðeins komið út í lokaútgáfu fyrir fyrsta bekk. Þar var raunar lítill texti þar sem gert var ráð fyrir að nemendur væru ólæsir er þeir kæmu sjö ára í fyrsta bekk (Kristinn Gíslason, 1978; Kristín Bjarnadóttir, 2007, bls. 267–268). Námsefni síðari bekkja var mislangt komið í drögum og var þýtt jafnóðum og það kom út í lokaútgáfu. Þegar ákvörðun var tekin um námsefni NKMM var inntak þess því ekki þekkt. Fjarlægð Íslands frá öðrum löndum og fjarvera þess frá norræna samstarfinu olli því að íslenskir ráðamenn urðu að treysta því sem þá leit út fyrir að horfa til framfara. Síðar kom í ljós að efnið var afar róttækt. Danski vísindasagnfræðingurinn Jens Høyrup (1979) mat Bundgaard-bókaflokkinn sem það danska námsefni sem gengi lengst í þá átt að mæta kröfum stærðfræðinganna á Royaumont-málþinginu.

Reikningskennsla

Reikningskennsla á rætur að rekja til loka miðalda er verslun og viðskipti tóku að vaxa í Evrópu. Farið var að prenta kennslubækur í reikningi á Ítalíu, í Portúgal, Þýskalandi og Hollandi á síðasta fjórðungi fimmtánda aldar. Reikniadgerðirnar fjórar: samlagning, frádráttur, margföldun og deiling heilla talna og brotinn voru meginviðfangsefni reikningskennslunnar (Swetz, 1992; Van Egmond, 1980). Það endurspeglast í lögum um fræðslu í reikningi á Íslandi árin 1880 og 1907 og í námskrá sem kom út árið 1929. *Námskrá fyrir nemendur á fræðsluskylldualdri* (Menntamálaráðuneytið, 1960) var í gildi er Bundgaard-bækurnar voru þýddar á íslensku. Í námskránni var gert ráð fyrir að kennt væri um reikniadgerðirnar fjórar í heilum tölum, tugabrotum og almennum brotum. Aðeins var minnst á reikningsþætti rúmfræði: flatarmál og rúmmál. Leiðbeiningar til kennara fylgdu og hvatt var til hugarreiknings. Bundgaard-bækurnar uppfylltu allar kröfur námskrárinna. Í henni var þó gert ráð fyrir að nemendum væru kynnt almenn brot við 11 ára aldur en þau komu fyrst fram í Bundgaard-bókunum fyrir 12 ára nemendur.

Þáttur í hugmyndafræði hinnar nútímalegu stærðfræði Bourbaki-hópsins var að leysa upp mörk reiknings, algebru og rúmfræði. Áhersla var lögð á að draga fram frumsendur eins og gert hafði verið í árdaga fyrir rúmfræði í *Frumþáttum Evklíðs* (1956) frá því um 300 f. Kr. Frumsendur talnareiknings og algebru mynda heildstætt kerfi um reiknieiginleika talna. Þær höfðu áður birst í *Kennslubók í algebru* eftir Ólaf Daníelsson (1927) en aldrei í prentuðum íslenskum kennslubókum í reikningi. Frumsendur talnareiknings eru eftirfarandi, þar sem bókstafirnir a, b, c tákna ótilteknar tölur:

Samlagning

- | | | |
|-----|-----------------------------------|--------------|
| R1. | $a + b$ er ótvírætt ákvörðuð tala | [Lokun] |
| R2. | $(a + b) + c = a + (b + c)$ | [Tengiregla] |
| R3. | $a + 0 = 0 + a = a$ | [Hlutleysa] |
| R4. | $a + (-a) = (-a) + a = 0$ | [Andhverfa] |
| R5. | $a + b = b + a$ | [Víxlregla] |

Margföldun

- | | | |
|------|---|--------------|
| R6. | $a \cdot b$ er ótvírætt ákvörðuð tala | [Lokun] |
| R7. | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ | [Tengiregla] |
| R8. | $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ | [Hlutleysa] |
| R9. | $a \cdot (1/a) = (1/a) \cdot a = 1$ | [Andhverfa] |
| R10. | $a \cdot b = b \cdot a$ | [Víxlregla] |

Dreifiregla

- R11. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

(Allendoerfer og Oakley, 1965, bls. 57)

Frummælendum á Royaumont-málþinginu varð tíðrætt um mikilvægi hugmynda Piagets um hugsanaferli ungra barna. Piaget hafði sagt að hluti af heild fæli í sér frumdrög að formgerð algebrunnar en hann rannsakaði tengsl milli formgerðar hugarstarfsins og stærðfræðilegrar formgerðar sem Bourbaki-hópurinn fékkst við. Hann setti niðurstöður sínar fram með stærðfræðilegu táknmáli eins og sjá má í grein hans frá árinu 1955 þar sem hann talar um skynjun barna, yngri en sjö ára, á safni af tréperlum þar sem B er heildarsafnið, A hluti þess og A' hinn hluti sama safns, gjarnan nefndur fyllimengi. Til þess að staðfesta að $A < B$ þurfi barnið að átta sig á að $A + A' = B$ eða $A = B - A'$ og $A' = B - A$. Hluti af heild leiði þannig til hugmyndar um algebrulega formgerð. Piaget setti fram frumsendur formgerðar sinnar:

1. $A + A' = B$; $B + B' = C$; $C + C' = D$; o.s.frv., þar sem samheyrandi hlutar eru sundurlægir ($A \times A' = 0$; $B \times B' = 0$; o.s.frv.).
2. $-A - A' = -B$, eða $A' = B - A$; o.s.frv.
3. $A - A = 0$.
4. $A + A = A$ (klifun).
5. Tengiregla er takmörkuð við aðgerðir án klifunar: $(A + A') + B' = A + (A' + B')$, en $A + (A - A) \neq (A + A) - A$

(Piaget, 1955, bls. 20, þýðing höfundar).

Svo virðist sem stærðfræðingarnir í Royaumont hafi hrifist af þessari stærðfræðilegu framsetningu, en Hans Freudenthal, félagi í CIEAEM, sem sótti ekki málþingið í Royaumont, gagnrýndi fljótlega rannsóknir Piagets. Hann sagði þær athygli verðar en taldi varhugavert að tengja þær við stærðfræðinám þar sem bakgrunnur Piagets í stærðfræði væri fremur veikur. Þá endurspegluðu rannsóknir Piagets varla aðstæður í kennslustofu heldur hinar óvenjulegu aðstæður í tilraunastofu sálfræðings (Furinghetti o.fl., 2008).

Piaget naut virðingar sem fræðimaður. Kenning hans um formgerð hugarstarfsins, þar sem einföld hugmynd um hluta af heild er sett fram á flóknu táknmáli, virðist hafa leitt endurskoðun skólastærðfræði allt niður á fyrstu skólaárólæsra barna til ótímabærrar áherslu á formgerð og táknmál.

Tillögur frá Royaumont um reikningskennslu og framsetning í Bundgaard-bókaflokknum

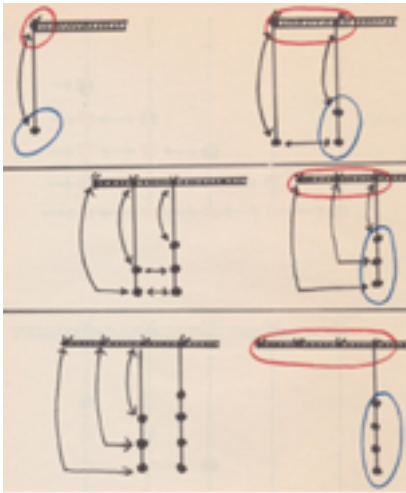
Þriðji kafli Royaumont-skýrslunnar fjallaði um nýja hugsun í stærðfræðimenntun þar sem leitað var svara við því hvaða stærðfræði ætti að kenna, hverjum og hvernig. Gustave Choquet kynnti þann vanda sem við væri að etja á þessu sviði og ræddi sálfræðilegar skírskotanir í stærðfræðikennslu jafnframt efnisatriðum. Hér á eftir verða rakin efnisatriði á sviði mengjafræði, formgerðar talnakerfisins og talnafræði.

Mengjafræðileg framsetning

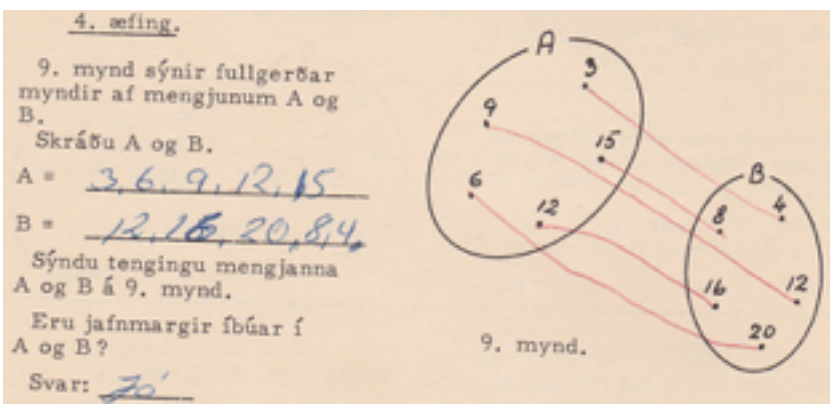
Í upphafi máls síns kynnti Choquet tilraunir Jeans Piaget um skilning barna á tölum og stærðum allt að sjö ára aldri (OEEC, 1961, bls. 62–63). Choquet ræddi síðan nútímalegu stærðfræðina, *mathematique moderne*. Þar væri ætlunin að leysa upp mörk milli reiknings, algebru, rúmfræði og örsmæðarreiknings. Ekki skyldi stilla reikningi og algebru upp sem andstæðum heldur flétta saman eins náð og unnt væri. Það væri mögulegt með því að íhuga hliðstæður í formgerð.

Mengin náttúrlegar tölur, N , og heilar tölur, Z , fælu í sér fjölda slíkra forma og þar mætti draga fram atriði sem telja mætti hreina reiknieiginleika, svo sem *deilanleika* og *frumtölur*. Mengið Z væri frábær grunnur að slíkri íhugun þar sem svo virtist sem það tæki mjög snemma á sig mynd í hugum barna. Hlutbundinn eiginleiki þess gerði það áþreifanlegt svo að það mætti nota til að kynna og rannsaka hugtök eins og *gagnkvæma samsvörun* (e. one-to-one correspondence), sem leiddi að hugtökunum *fjöldatala* (e. cardinal number), *fall* (e. function), *umreikningur* (e. conversion) og *jafngildi* (e. equivalence) (OEEC, 1961, bls. 63–64).

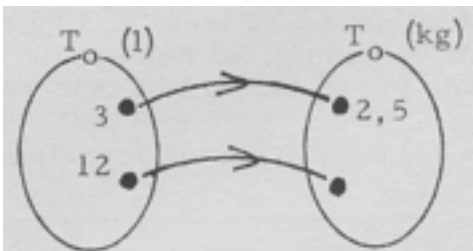
Þessi hugtök endurspeglast í efnisatriðum Bundgaard-bókaflokksins, sjá myndir 1, 2 og 3. Kennslubækurnar fyrir sjö og átta ára nemendur voru litprentaðar en kennslubækur fyrir eldri nemendur voru aðeins prentaðar í svarthvítu.



Mynd 1. Talnahugtakið byggt upp með gagnkvæmri samsvörun kúlna við talnalínuna sem er sýnd sem hnúta-band. Fyrir sjö ára nemendur. (Bundgaard og Kyttä, 1967, 1, bls. 20).

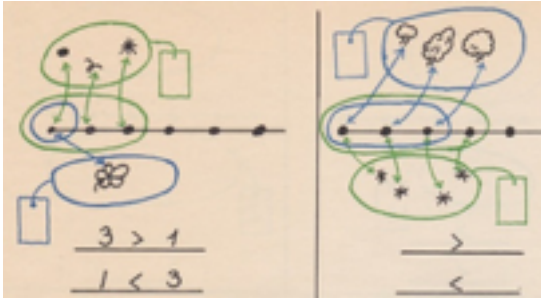


Mynd 2. Jafngildisvensl milli tveggja mengja. Fyrir tíu ára nemendur. (Bundgaard, 1970, 4a, bls. 24).*



Mynd 3. Fallhugtakið þar sem lítrar af olíu eru tengdir við vigt mælda í kg. Fyrir 11 ára nemendur. (Bundgaard, 1970, 4b, bls. 13).

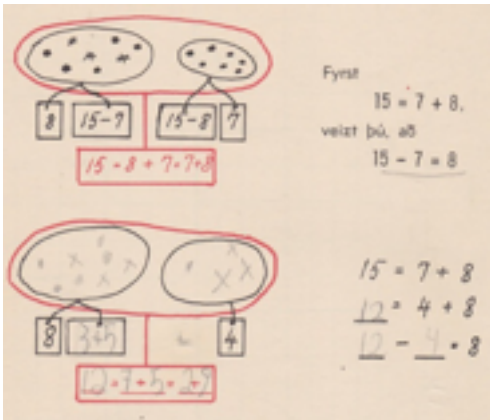
Hvað varðaði reikningskennslu í barnaskólum væri hægt að sýna endanlegan fjölda *fjöldatalna* og *ráðtalna* með Cuisenaire-kubbum, og samfara því sagði Choquet að sýna mætti hugtökin *hlutmengi úr mengi*, *fyllimengi*, *sammengi* og *sniðmengi* tveggja eða þriggja mengja. Hugtakið *röðun* mætti kanna með einföldum dæmum, sjá mynd 4 um framsetningu í Bundgaard-námsefninu. Þar má greina tengingu við hugmynd Piagets þar sem hann sagði hluta af heild fela í sér undanfara að formgerð algebrunnar.



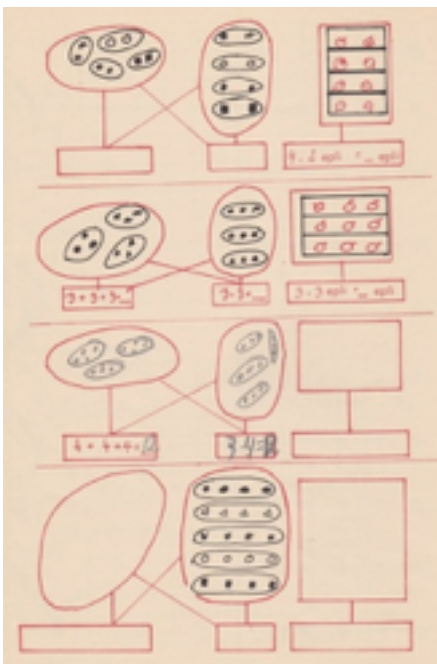
Mynd 4. Hlutmengi og röðun. Fyrir sjö ára. (Bundgaard og Kyttä, 1967, 1, bls. 29).

Sammengi og sniðmengi voru vandlega kynnt í báðum heftum Bundgaard-efnisins fyrir tíu ára nemendur. Dregnar voru fram frumsendur mengjaalgebru, líklega til að sýna hliðstæður við frumsendur talnareikningsins. Heiti frumsendna mengjaalgebru voru þó ekki nefnd.

Samlagningu og margföldun skyldi kynna sem sammengi *sundurlægra endanlegra mengja* og margföldun *endanlegra mengja*, sjá mynd 5 um samlagningu og mynd 6 um margföldun í Bundgaard-bókaflokknum.



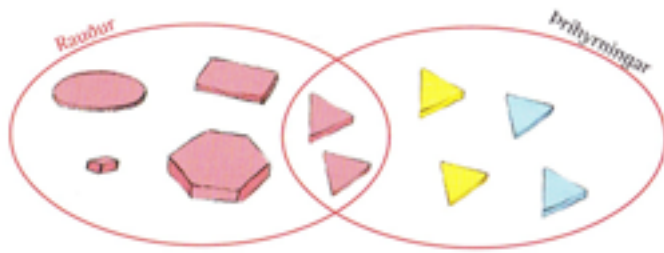
Mynd 5. Samlagning og frádráttur. Nemandinn sem vann verkefnið áttaði sig ekki alveg á hvernig bæri að fylla út í auðu reitina. Fyrir átta ára. (Bundgaard og Kyttä, 1968, 2a, bls. 20).*



Mynd 6. Margföldun, epli talin. Nemandinn vissi að $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$. Fyrir átta ára. (Bundgaard og Kyttä, 1968, 2a, bls. 34).*

Niðurstöðukafla skýrslunnar um Royaumont-námstefnuna fjallaði meðal annars um reikningskennslu. Þar var rætt um að sálfræðilegir þættir [nýrra] námsaðferða í barnaskólum og tilfærsla markmiða skólastarfs í þá átt að þróa hugtök og hugsunarmáta krefðust samsvarandi breytinga á reikningskennslu. Námið yrði að vera afrakstur skilnings sem sprytti af tilraunum undir leiðsögn og uppgötvunum, líklega með því að nota einhvers konar áþreifanlega hluti. Þannig mætti leiða nemandann að þeirri sértekningu eiginleika mengis sem nefnast *tala*. Leiðin að þessari sértekningu krefðist þess að nota hugmyndir – en ekki nauðsynlega tungutak – um *mengi*, *hlutmengi*, *gagnkvæma samsvörun* og *röðun* (OEEC, 1961, bls. 108–109).

Mengjafræðileg framsetning var einkum notuð í síðari kennslubókum við talningarfræðileg verkefni og flokkun, sjá til dæmis mynd 7 úr GP-námsefninu.



Mynd 7. Sammengi rauðra kubba og þríhyrninga þar sem rauðir þríhyrningar eru í sniðmenginu. (Guðbjörg Pálsdóttir, Guðný Helga Gunnarsdóttir, Guðrún Angantýsdóttir og Jónína Vala Kristinsdóttir, 2003, 2, bls. 89).

Hér á eftir, í *töflu 1*, eru talin upp efnisatriði sem tengjast mengjafræði. Í *töflum 1–3* eru tölur sem tákna aldurstigið þegar atriðið var fyrst sett fram. Aldur innan sviga merkir að atriðið var aðeins lauslega kynnt, lítið sem ekkert rökstutt og/eða ekki var unnið með það í því sem á eftir fór. Annars var reglulega komið að því aftur.

Tafla 1. Mengjafræðileg hugtök í fimm íslenskum kennslubókaflokkum fyrir barnaskólastig

Kennslubókaflokkar	SÁG	EB	AB	RB	GP
Árabil í notkun	1911–37	1927–80	1966–80	1971–00	1999–10
Aldurstig	10–13	10–12	7–12	7–12	6–12
Mengi			7	7	10
Gagnkvæm samsvörun			7	(7)	
Hlutmengi			7	7	
Sammengi			(7), 10		11
Sniðmengi			10		11
Inngangur að mengjaalgebru			10		
Mengjamismunur			10		
Fyllimengi			10		
Táknmál mengjafræði			10	(11)	

Af töflu 1 má lesa að mengjafræðileg hugtök voru óþekkt fyrir tilkomu Bundgaard- kennslubókanna og notkun þeirra dvínaði hratt í síðari kennslubókum. Þeim brá þar þó fyrir síðar en ekki jafnkerfisbundið og í Bundgaard-kennslubókunum í því skyni að draga fram stærðfræðileg hugtök. Mengi sett fram sem hringlaga myndir komu til dæmis aðallega fyrir í R.B-bókaflokknum fyrir yngstu aldursflokkana en voru síðar sett fram sem upptalning í svigum. Sammengi og sníðmengi voru ekki nefnd í R.B-bókaflokknum en birtust á eðlilegan hátt í talningarfræðilegum verkefnum í GP-bókaflokknum til hagræðis við að setja slík verkefni fram á myndrænan hátt.

Aðeins hefur verið fjallað um hugtök nýju stærðfræðinnar en hugtökunum fylgdi táknmál. Mynd 8 sýnir blaðsíðu úr Bundgaard-kennslubók, hefti 5b, fyrir 11 ára nemendur, þar sem dregið er saman táknmál mengjafræðinnar sem kynnt var í fyrri heftum.

46

Mengi

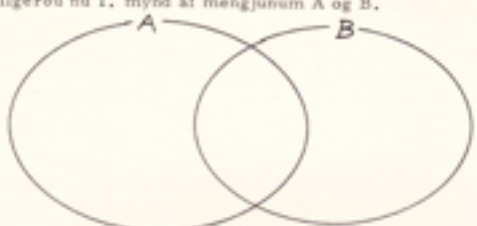
Þú manst kannski enn þá eftir tveim mengjum, A og B, sem við tókum til athugasáttar í 4. hefti. A var mengi þeirra barna í einum bekk skólans, sem voru boðin í afmæli Önnu, og B var mengi þeirra barna í sama bekk, sem voru boðin í afmæli Birgis. Hér eru bæði mengin skráð.

$A = \{a, b, g, h, m, p, s\}$
 $B = \{b, d, f, g, i, m\}$

Skrifaðu nú nafn sníðmengis A og B og skráðu það:
 _____ = _____

Skrifaðu svo nafn sammengis A og B og skráðu það:
 _____ = _____

Fullgerðu nú 1. mynd af mengjunum A og B.



1. mynd.

Skrifaðu "S" eða "Ó" við þessar yrðingar.

$A \cap B = B \cap A$. _____ $A \cup B = B \cup A$. _____

$A \subseteq B$. _____ $B \subseteq A$. _____ $A \cap B \subseteq A$. _____ $A \cap B \subseteq B$. _____

Það svæði á 1. mynd, sem nú sýnir myndir þeirra báða í A, sem eru ekki í B, er fullgerð mynd af mengi. Litaðu þetta svæði ljósblatt. Mengi þeirra báða, sem sýndir eru á þessu svæði, er kallað

mismunur mengjanna A og B.

Nafn þessa mengis skrifum við svona:

$A \setminus B$.

Þetta nafn er venjulega lesið "A ekki B".

Skráðu nú þetta mengi: $A \setminus B =$ _____

Á 1. mynd má líka sjá mynd af mengi þeirra báða í B, sem eru ekki í A. Þetta mengi nefnist "mismunur mengjanna B og A" og er táknað " $B \setminus A$ ". Litaðu nú svæðið á myndinni ljósgult og skráðu mengið:

$B \setminus A =$ _____

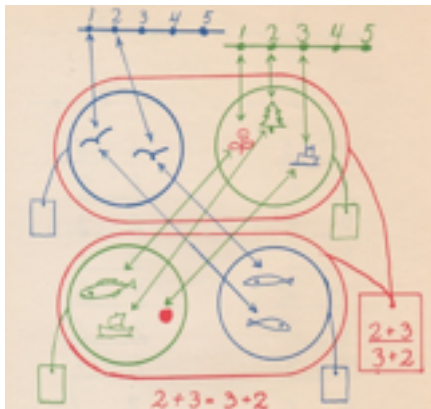
V

Mynd 8. Táknmál mengjafræðinnar (Bundgaard, 1971, 5b, bls. 46).

Formgerð talnakerfisins og frumsendur talnareiknings

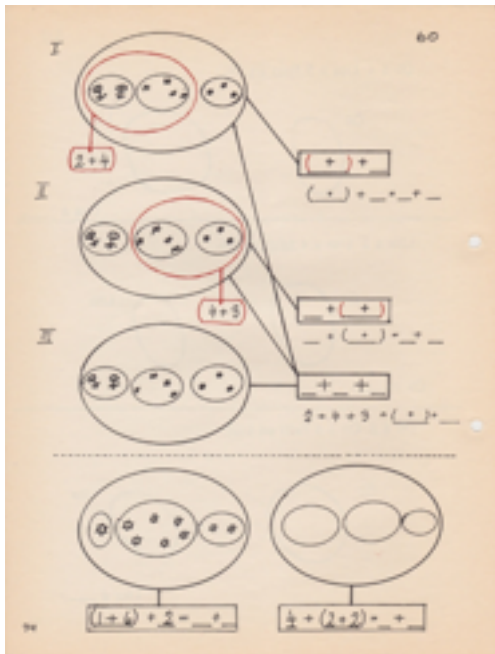
Í niðurstöðukafla skýrslunnar um Royaumont-námstefnuna sagði að nauðsynlegur þáttur í byrjendakennslunni væri að stuðla að skilningi á sætiskerfi talna og notkun þess. Ásamt því að efla tilfinningu fyrir frumsendum talnareiknings: víxlreglu, tengireglu og dreifireglu, væri hægt að þróa aðgerðir á heilum tölum, almennum brotum og tugabrotum á skynsamlegan hátt án neinna brellna (OECC, 1961, bls. 108–109).

Frumsendur talnareiknings voru kynntar skref fyrir skref í Bundgaard-bókaflokknum. Kynningin hófst á víxlreglu samlagningar í fyrsta heftinu fyrir sjö ára gamla nemendur, sjá mynd 9, eftir að röðun hafði verið kynnt, sjá mynd 4.



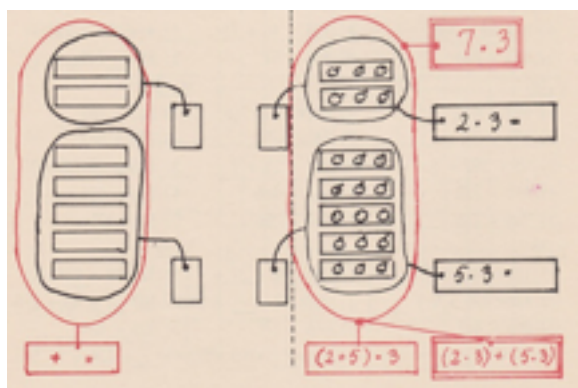
Mynd 9. Víxlregla. Fyrsta kynning á samlagningu og „+“ táknum. Fyrir sjö ára. (Bundgaard og Kyttä, 1967, 1, bls. 32).

Víxlreglu var fylgt eftir með tengireglu samlagningar síðar í fyrsta bekk, sjá mynd 10.



Mynd 10. Tengiregla samlagningar. Fyrir sjö ára. (Bundgaard og Kyttä, 1967, 1, bls. 74).

Myndir 11 og 12, sem sýna dreifireglu, eru einu myndirnar af daglegu lífi fólks í bókaflokknum. Agnete Bundgaard tók skýrt fram að hún vildi ekki dreifa huga nemenda með myndum sem ekki tengdust námsefninu. Hún sagði í bréfi til íslenskra kennara: „Kære islandske kolleger. Det er Dem, der skal prøve at vise børnene, at faget i sig selv er morsomt og til dette formål kan jo kun benyttes ting som er relevante for faget.“ (Bundgaard, 1969b, bréf sem fylgdi Handbók kennara, 3. hefti).



Myndir 11 og 12. Dreifiregla. Fyrir átta ára. (Bundgaard og Kyttä, 1968, 2b, bls. 72).

Kynning á frumsendum talnakerfisins er dregin saman í töflu 2. Víxlreglur og tengireglur samlagningar og margföldunar voru kynntar hver á eftir annarri við sjö ára aldur í Bundgaard-námsefninu, þar sem heiti reglnanna voru skýrt tekin fram. Hlutleysur samlagningar og margföldunar voru kynntar við níu ára aldurinn. Margföldunarandhverfa var sett fram í tengslum við deilingu við 12 ára aldur. Samlagningarandhverfa var ekki tekin fyrir þar sem neikvæðar tölur komu ekki fyrir í bókaflokknum. Andhverfar aðgerðir koma fram í GP-bókaflokknum og eru teknar hér með vegna skyldleika þeirra við samlagningar- og margföldunarandhverfur.

Tafla 2. Frumsendur um talnareikning í Bundgaard-bókaflokknum í samanburði við aðra bókaflokkka.

Kennslubókaflokkar	SÁG	EB	AB	RB	GP
Árabil í notkun	1911–37	1927–80	1966–80	1971–00	1999–10
Aldurstig	10–13	10–12	7–12	7–12	6–12
Víxlregla samlagningar			7	7	11
Víxlregla margföldunar	(10)		8	10	11
Dreifiregla			8	10	11
Tengiregla samlagningar			7		11
Tengiregla margföldunar			9	12	11
Hlutleysa samlagningar			9		12
Hlutleysa margföldunar			9		12
Samlagningarandhverfa				12	
Margföldunarandhverfa			12		
Andhverfar aðgerðir					
- samlagning – frádráttur					10
- margföldun – deiling					11

Grundvallarreglur talnareiknings sem felast í frumsendunum eru nauðsynlegar undirstöður reiknings. Fyrr á tímum var kennurum falið að koma þeim til skila án þess að þeim væri gefið heiti. Lögð var mikil áhersla á það í Bundgaard-bókaflokknum að nemendur beittu reglunum meðvitað og nefndu þær með sínu heiti. Af töflu 2 má lesa að haldið var áfram eftir að Bundgaard-bækurnar voru lagðar af að nefna heitin, einkum víxlreglu, tengireglu og dreifireglu.

Tölur og talnavensl

Choquet taldi að kynning á *jákvæðum* og *neikvæðum heiltölum* frá níu ára aldri ylli engum vandkvæðum. Nota mætti færslur til hægri og vinstri. Þetta efni mætti líka æfa í leikjum, t.d. með vinningi og tapi. Það veitti betri skilning á núlli og gæti hentað sem inngangur að algebru. *Níu-prófun*¹, sem erfitt er að rökstyðja á þessu stigi, ætti að hverfa. Nemendur ættu fremur að prófa reikninga sína með því að snúa þeim við og nota andhverfa aðgerð, prófa samlagningu með frádrætti og öfugt.

Tugabrot ætti að innleiða fremur snemma, einskorðuð við hentugan rithátt til að skrá stórar tölur en ekki til að rannsaka eiginleika reikningsaðgerða. Margföldun og deiling stórra talna væru óþarfa byrðar fyrir börn. Þau þyrftu að kunna einfaldan og fljótvirkan *hugarreikning* og þjálfast í *nálgun* (e. approximation) og *mati* (e. estimation) á stórum tölum (OEEC, 1961, bls. 65).

Ekki væri hægt að komast hjá *almennum brotum*, sem væru mesta hindrunin í reikningskennslu, en á barnaskólastigi ætti ekki að líta á brot sem tölur eins og í reikningsdæminu $2/3 + 1/5$. Líta ætti á brotin sem „virkja“ (e. operator) sem verkaði á stærðir, til dæmis að finna $2/3$ af stærð. Síðar, þegar mengi rauntalna hefði verið kynnt sem „arkimedískt raðað víxlið talnasvið“, yrði engin spurning um brot þar sem samkvæmt skilgreiningu yrði brot eins og $2/3$ stak í því. Ólík brot táknuðu sama virkja, s.s. $2/3$ og $4/6$. Þar af stafaði ruglingur milli virkja og brota sem talna og þar af spryttu erfiðleikar við að skilgreina summu og margfeldi brota (OEEC, 1961, bls. 66).

Segja má að stærðfræðingarnir í Royaumont hafi farið fram úr sér með því að nefna „arkimedískt raðað víxlið talnasvið“. Það er sérstakur kими hreinnar algebru á háskólastigi og hefur aldrei verið þáttur í skólastærðfræði. En stærðfræðingarnir hafa áttað sig á erfiðleikunum við brotareikning sem hefur löngum reynst mörgum nemendum fjötur um fót. Áhugavert hefði verið að sjá nánari umræður um það efni.

Í niðurstöðukafla skýrslunnar sagði að skýrum börnum mætti kynna talnavensl, svo sem *odda-tölur* og *sléttar tölur*, *frumtölur*, þáttun, *stærsta sameiginlega þátt*, *minnsta sameiginlega margfeldi* og *sætiskerfi* önnur en tugakerfi. Síðar mætti minnst á *tölfræðileg meðaltöl*, *mátkerfi* (e. modular systems), *talnarunur* o.fl. Slíkt yrði vissulega að vera í umsjón kennara sem skildi öll undirliggjandi stærðfræðileg vensl og tengsl efnisins við eftirfarandi námsefni (OEEC, 1961, bls. 109–110).

Einnig var minnst á atriði sem þátttakendur voru ekki sammála um, svo sem hvort kynna ætti snemma *neikvæðar tölur* sem viðbót eða fylgiafurd heilla jákvæðra talna og brota, hvort kenna skyldi að *draga rót* áður en töflur væru notaðar, og hvort nota mætti stæður eins og $8 + 1$, $7 + 2$, ... sem annað heiti á 9, eða líta fremur á þær sem aðgerð.

Önnur atriði, sem ekki var eining um, voru *notkun reiknivéla* og að hve miklu leyti skyldi nota kubba og líti. Á hinn bóginn var eining um að kenna skyldi reikning þannig að formgerðin kæmi skýrt fram, að leggja áherslu á frumsendurnar og á hlutverk talnanna 0 og 1. Allt sem kennt væri ætti að þjóna sem undirbúningur fyrir frekara nám en á barnaskólastigi væri það gert óbeint. Ekki var tími til að ræða hvernig víkka mætti út reikning til ræðra talna og rauntalna (OEEC, 1961, bls. 110).

¹ Níuþróf var algengt áður fyrir þegar þurfti til dæmis að leggja saman margar tölur. Þá var deilt í hvern lið samlagningarinnar með níu, afgangar deilinganna lagðir saman og deilt í þá summu með níu. Afgangur þeirrar deilingar átti þá að vera hinn sami og afgangurinn þegar deilt var í heildarsummuna með níu. Prófið er þó ekki einhlítt. Það er dæmi um hagnýtingu mætreikninga.

Tafla 3. Tölur og talnavensl í Bundgaard-bókaflokknum í samanburði við aðra bókaflokka.

Kennslubókaflokkar	SÁG	EB	AB	RB	GP
Árabil í notkun	1911–37	1927–80	1966–80	1971–00	1999–10
Aldurstig	10–13	10–12	7–12	7–12	6–12
Almenn brot:					
- sem virkjar	11	11	12	9	10
- aðgerðir	12	11	12	9	11
Neikvæðar tölur				11	9
Tugabrot	12	11	10	11	10
Talnalínan			7	7	6
Talnavensl:					
sléttar tölur og oddatölur	13	11	8	8	8
frumtölur	13		9	12	12
Frumþáttun	13		10	12	12
Deilanleiki	13	(12)	9		12
0 í margföldun	(11)		8		10
0 í deilingu			10		
Önnur sætiskerfi en tugakerfi			9		
Mátkerfi (e. modular systems)			11		
Tákn eins og $7 + 2$ fyrir 9			8	7	8
Níu-próf			11		
Breytur					
- staðgenglar tiltekinna talna				7	10
- stærðir með breytileg gildi					11
Jöfnur				10	10
Inngangur að líkindareikningi				9	10
Inngangur að tölfræði			11	8	10
Hugarreikningur	10		8	9	6
Nálgun, mat			11	8	9
Notkun vasareikna					10

Tafla 3 sýnir að *neikvæðar tölur* voru ekki teknar fyrir í Bundgaard-efninu og heldur ekki í eldri bókaflokkum fyrir barnaskólastig. Yngri bókaflokkar kynntu neikvæðar tölur: RB við ellefu ára aldur og GP við níu ára aldur. Þessari rannsókn er aðeins ætlað að gera grein fyrir því hvenær hugtök voru kynnt en ekki hvenær vandasamar reikniáðgerðir eins og margföldun tveggja neikvæðra talna voru teknar fyrir. Choquet nefndi að *almenn brot* væru mesta hindrunin í reikningskennslu og sagði að hann hefði þá átt við reikniáðgerðir almennra brota. Hvenær þær skyldu teknar fyrir og með hvaða hætti er ekki nefnt í Royaumont-skýrslunni.

Efnisþættir um tölur, svo sem *frumtölur* og *deilanleiki*, gengu í endurnýjun lífdaga í Bundgaard-bókaflokknum eftir að hafa verið áberandi í bókaflokki Sigurbjarnar Á. Gíslasonar, *SÁG*, í byrjun 20. aldar. Sætiskerfi önnur en tugakerfi, til dæmis fimmundakerfi, ferundakerfi og tylftakerfi, sem kynnt voru í þriðja bekk (Bundgaard, 1969a, 3b, bls. 86–92), vöktu athygli en komu ekki fyrir í síðari bókaflokkum fyrir yngsta stig og miðstig. Hið sama má segja um *mátreikninga* (e. modular arithmetic), þar sem reiknað er innan takmarkaðs talnamengis eins og til dæmis á klukkunni þar sem talið er innan mengisins 1 til 12 eða 1 til 24. Hins vegar komu efnisþættirnir *nálgun* (e. approximation) og *mat* (e. estimation) inn í Bundgaard-bókaflokknum, *AB*, og héldu velli eftir það. Mælt var með því í Royaumeont-skýrslunni að *líkindareikningur* og *tölfræði*, sem birtust í síðari kennslubókaflokkum fyrir barnaskólastig, yrðu sett fram á unglingsstigi (OEEC, 1961, bls. 106–107) og tölfræðilegum meðaltölum brá fyrir í Bundgaard-bókaflokknum. Einfeldar *jöfnur* og *breytur* fóru líka að koma snemma fram í síðari bókaflokkum.

Niðurstöður

Spurt var hvaða hugmyndir um reikningskennslu, sem komu fram í Royaumeont, voru innleiddar í námsefni sem samið var fyrir barnaskólastig á vegum NKMM. Hér að framan hefur verið rakið hvernig Bundgaard-kennslubækurnar voru sniðnar að hugmyndum sem fram komu í skýrslunni um Royaumeont-fundinn. Þar sagði að leiðin að uppbyggingu talnahugtaksins krefðist þess að nota hugmyndir um mengi, hlutmengi, gagnkvæma samsvörun og röðun. Því var vissulega beitt í Bundgaard-efninu og ekki aðeins hugmyndum heldur var einnig lögð áhersla á táknmál mengjafræðinnar, sjá töflu 1.

Frumsendunum víxlreglu, tengireglu og dreifireglu var óspart beitt til að þróa aðgerðir á heilum tölum, almennum brotum og tugabrotum á rökstuddan hátt og draga fram formgerð talnakerfisins, sjá töflu 2. Frumsendurnar voru skýrt dregnar fram með heitum og reglulega minnt á formgerðina. Rík áhersla var einnig lögð á að efla talnaskilning, til dæmis með þáttun og deilanleika, og skilning á sätiskerfi talna,.

Einnig var spurt hvort hugmyndirnar frá Royaumeont hefðu verið nýjar á Íslandi. Því er til að svara að nýir efnisþættir í Bundgaard-bókaflokknum í samanburði við fyrra efni voru í fyrsta lagi mengjafræðileg hugtök og táknmál mengjafræðinnar. Talnahugtakið og talnakerfið voru skipulega byggð upp allt að neikvæðum tölum út frá mengjafræðilegum forsendum í Bundgaard-námsefninu.

Í öðru lagi var leitast við að efla skilning á talnahugtakinu og reikniadgerðum með endurteknum tilvísunum til frumsendna talnareiknings. Ekki hafði tíðkast áður að nefna frumsendurnar berum orðum en þó hafði vissulega verið dregið fram í eldra námsefni með endurteknum æfingum að $3 + 5$ væri jafnt $5 + 3$ og $5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$ svo að dæmi séu tekin. Þessar reglur voru sjaldnast ræddar í kennslubókum heldur eftirlátið kennurunum. *SÁG* nefndi þó víxlreglu lítilliga. Síðari kennslubækur, bæði Stærðfræði handa grunnskólum, RB, og Geisli, GP, nefna vissulega frumsendurnar en þar voru þær fremur nýttar til að styðja við reikniadgerðir en til að draga fram formgerð talnakerfisins.

Að lokum var spurt hvort hugmyndir stærðfræðinganna í Royaumeont hefðu lifað af fyrstu hrifningarölduna í kjölfar breytinganna og hlotið varanlegan sess í íslenskri skólastærðfræði. Fljótlega dró verulega úr mengjafræðilegri framsetningu og minna var leitast við að draga fram formgerð talnakerfisins í síðara námsefni. Líta verður svo á að kennarar sem tóku til við að semja nýtt námsefni í kjölfar Bundgaard-bókaflokksins hafi ekki talið mengjafræðina og formgerðina stuðla að þeim aukna skilningi sem þeim var ætlað.

Meðal þess sem hefur lifað fram á þennan dag í skólastærðfræði barna er samsetning náttúrulegra talna úr frumtölum, deilanleiki og áhersla á hugarreikning. Þessar hugmyndir voru þó engan veginn nýjar heldur má til dæmis rekja hugtökin frumtölur og frumþáttun aftur til Forn-Grikkja. Frumtölur, frumþáttun og hugarreikningur áttu líka góðan sess í bókaflokki *SÁG* en

lágu í láginni á hinu langa skeiði er bókaflokkur Elíasar Bjarnasonar, EB, var nær einn í boði í skólakerfinu. Nálgun og mat hafa líka öðlast fastan sess í skólastærðfræði á Íslandi og sömuleiðis notkun reiknivéla en á því sviði voru Royaumont-menn framsýnir.

Inngangur að tölfræði og líkindareikningi hefur komið í stað þess sem ekki hefur fest í sessi. Þessir efnisþættir voru ræddir í Royaumont en síður ætlaðir barnaskólastigi. Hið sama má segja um notkun breytistærða og lausn einfaldra jafna.

Ekki er hægt að segja að neitt af því sem var að finna í bókum Elíasar Bjarnasonar hafi horfið. Þar voru kenndar aðferðir við reikniaðgerðirnar fjórar í heilum jákvæðum tölum, tugabrotum og almennum brotum í samræmi við námskrá frá 1960 og eldri námskrá og lög. Aðferðirnar voru vissulega öðruvísi en í Bundgaard-bókaflokknum, en lítið var rætt við nemendur eða færð fram rök, aðeins fyrirhælt um hvernig fara skyldi að.

Varla er hægt að segja að Bundgaard-bókaflokkurinn hafi stutt við tilrauna- eða uppgötvunar-nám. Þvert á móti var lögð áhersla á hugtök um formgerð, mengjamálfar og tilheyrandi táknað. Á hinn bóginn var lögð sérstök rækt við athuganir á talnavenslum og sætisrithátt í tugakerfi. Nokkur áhersla var á að nota mætti stærður eins og $8 + 1$ og $7 + 2$ fyrir tölur, sjá töflu 3. Slíkar stærður voru nefndar plúsheiti tölunnar. Þau voru gjarnan notuð til að hluta tölur niður í tugi og einingar, svo sem $14 = 10 + 4$ til að styðja við skilning á því að geyma í samlagningu, eða til að örva hugarreikning með hjálp tengireglu, til dæmis: $13 + 9 = 13 + (7 + 2) = (13 + 7) + 2 = 20 + 2 = 22$.

Umræða

Rétt er að nefna að samanburður eins og hér hefur verið lýst gefur aðeins yfirborðskennda mynd af framsetningu námsefnisins í kennslubókunum. Aðeins er getið um hugtök en ekki er nánar kynnt hvernig þau eru sett fram. Rannsóknaraðferðin er ekki hönnuð til þess. Veigamikill þáttur í því að Bundgaard-námsefnið olli miklu uppnámi á Íslandi var að þar voru kynntar aðrar aðferðir og önnur uppsetning við samlagningu, frádrátt, margföldun og deilingu en tíðkast hafði um langa hríð. Var það kallað mengjareikningur þótt uppsetning reikningsdæmanna hafi ekki stuðst við mengjaframsetningu. Áhugavert væri að gera þeim aðferðum skil í sérstakri grein. En vonast er til að þessi grein verði til að vekja áhuga almennings, kennara, höfundar kennslubóka og fræðimanna á að kynna sér nánar framsetningu námsefnis í stærðfræði fyrir börn, bæði efnis sem er í notkun á hverjum tíma og eldra efnis, sem var mótað eins og rétt var talið þegar það var gefið út.

Royaumont-málþingið olli straumhvörfum í umræðu og rannsóknum á námi og kennslu í stærðfræði. Jeremy Kilpatrick, fræðimaður sem hefur lagt drjúgan skerf til rannsókna á því sviði um margra áratuga skeið, sagði í nýlegri grein:

Fyrir tíma nýju stærðfræðinnar datt engum í hug að hugsa um skólastærðfræði sem efni sem þyrfti endurskoðunar eða endurnýjunar við; hún var einfaldlega eins og hún var. Frömuðir nýju stærðfræðinnar vissu næstum ekkert um skólanámsefni í skólastærðfræði í öðrum löndum eða jafnvel í eigin landi í sumum tilvikum. Um það leyti sem skeiði nýju stærðfræðinnar lauk voru allir sem fengust við skólastærðfræði miklu betur að sér um það hvað var að gerast víðsvegar um heim. (Kilpatrick, 2012, þýðing höfundar)

Gjarnan má taka undir það með Jens Høyrup (1979) að Bundgaard-bókaflokkurinn fari nærri því að uppfylla ítrustu kröfur stærðfræðinganna. Því verður ekki á móti mælt að hugmyndir sem settar voru fram í Royaumont miðuðust við það sem stærðfræðingar töldu heppilegan undirbúning undir frekara nám í stærðfræði og reikningskennsla væri grundvöllurinn. Á hinum endanum er móttakandinn, barnið. Upphaflega voru menn ganteknir af hugmyndum Piagets um tengsl milli formgerðar hugarstarfs forskólabarna og hinnar stærðfræðilegu formgerðar sem Bourbaki-hópurinn lagði áherslu á. Sjá má skýra mynd af því hvernig leitast er við að draga fram formgerð algebrunnar í Bundgaard-efninu.

Markmið Royaumont-málþingsins var að skapa nýja hugsun um skólasterðfræði. Vonir voru bundnar við að rannsóknir Piagets færðu mönnum skilning á því hvernig stærðfræðinám ætti sér stað. Þær vonir brugðust. Jafnvel mætti halda því fram að Piaget hafi leitt endurskoðunarhreyfingu á villigötur með því að klæða einfaldar hugmyndir um hugsun barna í flókið táknmál sem endurómáði síðar í námsefni ungra barna. Síðar komu fram aðrir fræðimenn sem rannsökuðu stærðfræðinám. Rússneski sálfræðingurinn Lev Vygotsky (1896–1934) hafði ritað athygliverð verk um það efni en hin fyrstu þeirra birtust ekki á ensku fyrr en árið 1962 og voru ekki komin til umræðu þegar nýja stærðfræðin svokallaða var að rísa til vegs. Stærðfræðinám er flókið ferli sem fræðimenn og kennarar eru enn að glíma við að greina og skilja.

Enn má dást að hinni vönduðu og heilsteypu framsetningu Bundgaard-námsefnisins þar sem stærðfræðileg hugtök og hugmyndir eru dregin skýrum dráttum og geta nýst sem undirbúningur undir fræðilegt nám í stærðfræði. Það var vissulega ætlun stærðfræðinganna í Royaumont þótt á barnaskólastigi skyldi það gert óbeint. Námsefnið olli sterkum viðbrögðum á Íslandi ekki síður en í öðrum löndum en kveikti líka hugmyndir kennara um nýja aðkomu að og aðferðir við stærðfræðikennslu. Umræða um stærðfræðikennslu hafði að mestu legið í dvala hérlendis um áratuga skeið.

Umræða og hugmyndavinna fékk byr undir báða vængi meðal kennara í kjölfar uppnáms vegna Bundgaard-námsefnisins og leiddi til vinnu að útgáfu kennslubókaflokksins RB, Stærðfræði handa grunnskólum, á vegum Skólarannsóknadeildar Menntamálaráðuneytisins og Ríkisútgáfu námsbóka áður en útgáfu Bundgaard-bókaflokksins var að fullu lokið. Nýtt námsefni tók einnig við af RB-bókaflokknum í fyllingu tímans. Hvort tveggja er alltaf mótandi þáttur: samfélagið og þekkingin. Til sérhvers tíma heyrir tilvísun námsefnis til samfélagsins og skoðana manna á framsæknum hugmyndum eins og staðan er í þann mund. Jafnframt færast menn lengra fram í leit að þekkingu og aðferðum við að nálgast hugsun og þroska barnanna.

* Myndir 2, 5 og 6 með lausnum nemenda eru teknar úr bókum í einkasafni höfundar.

Influences from the Royaumont-seminar in 1959 on primary school arithmetic in Iceland

A seminar on new thinking in school mathematics was held in Royaumont, France in 1959. At the seminar, the European proponents for reform of school mathematics met representatives of the New Math movement in the United States. Some of the European participants were members of the Bourbaki-group of mathematicians who worked on presenting all mathematics in a unified modern way, *mathematique moderne*. One of the final recommendations of the seminar was that each country could reform its mathematics teaching according to its own needs; establishing as much cooperation as possible was recommended, however. The Nordic participants at the Royaumont Seminar agreed upon cooperation on reform of mathematics teaching and presented their ideas to governmental bodies. The issue was taken up in the Nordic Council, which decided to set up a committee under its Culture Commission. Each of four countries – Denmark, Finland, Norway and Sweden – appointed four persons to the Nordic Committee for Modernizing Mathematics Teaching, NKMM.

The Nordic Committee's task was to analyse the current situation in mathematics education, to work out curriculum plans and to write experimental texts. The committee appointed several teams of writers. The focus was on mathematical content, and the teaching of seventh to twelfth grades was its main object. However, it was decided to handle mathematics courses throughout the primary level, and for that purpose the committee contacted extra experts for the first to sixth grades of primary school.

Writing sessions were arranged in summer 1961. Some texts were ready that autumn, and others were to be so successively until the beginning of 1966. A Danish author, Agnete Bundgaard, and her Finnish collaborator wrote a textbook series for the primary level. The work was translated into Icelandic and published, nearly simultaneously with its Danish publication. Denmark was one of the countries which went the furthest when it came to introducing the Bourbaki tradition into university programs, and eventually also into high school programs (Karp, 2015).

In this paper, the text of the Bundgaard textbook series in its Icelandic version is analysed with respect to presentations on arithmetic education at the Royaumont seminar, mainly by Professor Gustave Choquet, and the final recommendations of the seminar. These are compared to previous and later arithmetic textbooks in use. The questions posed concerned which ideas from the seminar were implemented in the primary level textbook series, whether the ideas were new in Iceland, and whether they survived the first wave of enthusiasm for the New Math and became a permanent contribution to school mathematics in Iceland.

The results of the comparison of the Bundgaard series with four other textbook series, two previous to it and two later ones, show that the declared intention of the reform movement to emphasise the structure of the number system and build its presentation on set-theoretical concepts was duly followed in the Bundgaard-textbook series.

The new topics in the Bundgaard series were primarily the use of set theoretical concepts and notations for building up the number concept and understanding of operations through repeated reference to the axioms of the number field, see mynd [figures] 1–11, even if negative numbers were missing. The axioms were carefully introduced with respect to structure. One can, therefore, state that the Bundgaard series went far towards meeting the mathematicians' demands. In later textbooks these concepts appeared more as aids to calculations than emphasizing structure, which gradually faded away.

Building up the system of natural numbers from prime numbers and divisibility and emphasizing mental arithmetic were revived topics that have survived in the school curriculum to this day. Approximation and estimation have also become permanent contributions to school mathematics in Iceland. What did not become permanent was replaced by an introduction to statistics and probability, discussed at Royaumont but less recommended for primary level, and by the use of variables and solving simple equations.

Key words: School mathematics – The Royaumont seminar 1959 – NKMM – Bundgaard-textbook series – School mathematics textbooks

Um höfundinn

Kristín Bjarnadóttir (krisbj@hi.is) er prófessor emerita við Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Hún lauk B.A.-prófi í eðlisfræði og stærðfræði frá H.Í. 1968, kennslu- og uppeldisfræði frá H.Í. 1971, M.Sc.-námi í stærðfræði frá Oregonháskóla í Eugene 1983 og Ph.D.-gráðu í stærðfræðimenntun frá Hróarskelduháskóla 2006. Hún kenndi stærðfræði og eðlisfræði við grunnskóla og framhaldsskóla fram til 2003, og stærðfræðimenntun við Kennaraháskóla Íslands og Menntavísindasvið 2003–2013. Rannsóknaráherslur hennar varða stærðfræðikennslu og kennslubækur á grunn- og framhaldsskólastigi ásamt sögu þeirra.

About the author

Kristín Bjarnadóttir (krisbj@hi.is) is professor emerita at the University of Iceland – School of Education. She completed a BA degree in physics and mathematics at the University of Iceland in 1968, an M.Sc.-degree at the University of Oregon in Eugene in 1983, and a Ph.D.-degree in mathematics education at Roskilde University in 2006. She taught mathematics and physics at compulsory and upper secondary school levels until 2003 when she joined the University of Education, later School of Education at the University of Iceland, where she taught mathematics education. Her research interests concern mathematics teaching and textbooks for compulsory and upper secondary schools together with relevant historical aspects.

Heimildir

Til greiningar

- Bundgaard, A. (1969a–1972). *Stærðfræði. Reikningur. 3a, 3b, 4a, 4b, 5a, 5b, 6, AB*. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsflokka, RN.
- Bundgaard, A. og Kyttä, E. (1967–1968). *Stærðfræði. Reikningur. 1, 2a, 2b, AB*. Reykjavík: RN.
- Eliás Bjarnason. (e.d.). *Reikningsbók I – III. EB*. Reykjavík: RN.
- Guðbjörg Páldóttir. (1998). *Stærðfræði fyrir byrjendur: kátt er í Kynjadal. GP*. Reykjavík: Námsgagnastofnun, NÁST.
- Guðbjörg Páldóttir, Guðný Helga Gunnarsdóttir, Guðrún Angantýsdóttir og Jónína Vala Kristinsdóttir. (2002–2004). *Geisli 1, 2, 3. GP*. Reykjavík: NÁST.
- Mogensen, A. og Balzer Petersen, S. (1999–2001). *Eining 1–6. GP*. Reykjavík: NÁST.
- Ragnhildur Bjarnadóttir, Kolbrún Hjaltadóttir, Örn Ingólfsson, Anna Kristjánsdóttir, Anton Sigurðsson, Hanna K. Stefánsdóttir, Hörður Zóphaniásson og Ingibjörg Þorkelsdóttir. (1971–1977). *Stærðfræði handa grunnskólum 1A ... 6B. RB*. Reykjavík: RN.
- Sigurbjörn Á. Gíslason. (1911). *Reikningsbók I–IV. SÁG*. Reykjavík: Eymundsson.

Aðrar heimildir

- Allendoerfer, C. B. og Oakley, C. L. (1965). *Principles of mathematics*. New York: McGraw–Hill.
- Anna Kristjánsdóttir. (1996). *Stærðfræðinám. Meginstefnur og viðfangsefni*. Reykjavík: Kennaraháskóli Íslands.
- Bundgaard, A. (1969b). *Handbók kennara 3*. Reykjavík: RN.
- CIEAEM. (e.d.). Sótt af <http://www.cieaem.org/>
- Eliás Bjarnason. (1927–1929). *Reikningsbók I–II*. Reykjavík: Bókaverslun Guðm. Gamalielssonar.
- Evklíð. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Ritstj. T. L. Heath. New York: Dover.
- Furinghetti, F., Menghini, M., Arzarello, F. og Giacardi, L. (2008). ICMI renaissance: The emergence of new issues in mathematics education. Í M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi og F. Arzarello (ritstj.), *The first century of the International Commission on Mathematics Instruction (1908–2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education* (bls. 131–147). Róm: Istituto della Enciclopedia Italiana.
- Gjone, G. (1983). “Moderne matematikk” i skolen. *Internasjonale reformbestrebelse og nasjonalt læreplanarbeid, I–VIII*. Osló: Höfundur.
- Helgi Elíasson. (1944). *Lög og reglur um skóla- og menningarmál á Íslandi sem í gildi eru í marzlok 1944*. Reykjavík: Fræðslumálastjórn.
- Høyrup, J. (1979). Historien om den nye matematik i Danmark – en skitse. Í P. Bollerslev (ritstj.), *Den ny Matematik i Danmark* (bls. 49–65). Kaupmannahöfn: Gyldendal.
- Karp, A. (2015). Interview with Mogens Niss. *The International Journal for the History of Mathematics Education*, 10(1), 55–76.
- Kilpatrick, J. (2012). The new math as an international phenomenon. *ZDM Mathematics Education*, 44, 563–571. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0393-2>
- Kristinn Gíslason. (1978). *Nýja stærðfræðin* [óprentuð skýrsla til Fræðslustjórans í Reykjavík].
- Kristín Bjarnadóttir. (2007). *Mathematical education in Iceland in historical context – socio-economic demands and influences*. Ph.D. dissertation nr. 456–2007. Roskilde: Roskilde Universitets Center. Sótt af <http://rudar.ruc.dk/handle/1800/2914>.
- Kristín Bjarnadóttir. (2011). Implementing ‘modern math’ in Iceland – informing parents and the public. Í M. Pytlak, T. Rowland og E. Swoboda (ritstj.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 9th–13th February, 2011 Rzeszów, Poland*, bls. 1670–1679. Rzeszów: University of Rzeszów. Sótt af http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/12/CERME7_WG12_Bjarnadottir.pdf
- Kristín Bjarnadóttir. (2012). „Nýja stærðfræðin“. Uppruni og afdrif. *Ráðstefnurit Netlu – Menntakvika 2012*. Sótt af <http://netla.hi.is/menntakvika2012/009.pdf>

- Kristín Bjarnadóttir. (2013). Reikningsbækur tveggja alda – markmið, markhópar og gildi. *Uppeldi og menntun*, 22(1), 53–76. Sótt af <http://timarit.is/files/29546108.pdf#navpanes=1&view=FitH>
- Kristín Bjarnadóttir. (2017). Recommendations of the Royaumont Seminar on primary school arithmetic. Influences in the Nordic countries. Í K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, M. Menghini, J. Prytz og G. Schubring (ritstj.), “*Dig where you stand.*” 4. *Proceedings of the fourth International Conference on the History of Mathematics Education* (bls. 47–59). Róm: Edizioni Nuova Cultura. doi:10.4458/8647
- Menntamálaráðuneytið. (1960). *Námsskrá fyrir nemendur á fræðsluskilyldualdri*. Reykjavík: Höfundur.
- Menntamálaráðuneytið, skólarannsóknadeild. (1977). Um stærðfræðinám í grunnskóla skólaárið 1977–1978 [dreifibréf undirritað af Önnu Kristjánsdóttur]. Reykjavík: Höfundur.
- Nordisk Råd. (1967a). *Nordisk skolmatematik*. (Nordisk udredningsserie, 9). Stokkhólmur: Höfundur.
- Nordisk Råd. (1967b). *New school mathematics in the Nordic countries*. Stokkhólmur: Höfundur.
- OEEC. (1961). *New thinking in school mathematics*. París: Höfundur.
- Ólafur Daníelsson. (1927). *Kenslubók í algebru*. Akureyri: Bókaverslun Þorsteins M. Jónssonar.
- Piaget, J. (1955). Les structures mathématiques et les structures opératoires de l’intelligence. Í *L’Enseignement des mathématiques. Nouvelles perspectives*, bls. 11–33. Neuchâtel og París: Delachaux og Niestlé.
- Prytz, J. og Karlberg, M. (2016). Nordic school mathematics revisited. On the introduction and functionality of New Math. *NOMAD*, 21(1), 71–93.
- Schubring, G. (2014a). The original conclusions of the Royaumont seminar 1959. *The International Journal for the History of Mathematics Education*, 9(1), 89–101.
- Schubring, G. (2014b). The road not taken – The failure of experimental pedagogy at the Royaumont Seminar 1959. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 35(1), 159–171. <https://doi.org/10.1007/s13138-013-0058-x>
- Steingrímur Arason. (1928). *Reikningsbók handa alþýðuskólum* (4. útgáfa endurbætt og aukin). Reykjavík: Gutenberg.
- Swetz, F.J. (1992). Fifteenth and sixteenth century arithmetic texts: What can we learn from them? *Science and Education*, 1(4), 365–378.
- Van Egmond, W. (1980). Practical mathematics in the Italian Renaissance: a catalog of Italian abacus manuscripts and printed books to 1600. Í *Annali dell’Istituto e Museo di Storia della Scienza. Monografia N. 4* (bls. 3–36). Flórens: Istituto e Museo di Storia della Scienza.

Kristín Bjarnadóttir. (2018).

Áhrif Royaumont-málþingsins 1959 á íslenskt námsefni í stærðfræði fyrir börn.

Netla – Vef tímarit um uppeldi og menntun. Menntavísindasvið Háskóla Íslands.

Sótt af <http://netla.hi.is/greinar/2018/ryn/09>

DOI: <https://doi.org/10.24270/netla.2018.9>