



Ritrynd grein birt 30. desember 2011

Kristín Bjarnadóttir

Stærðfræði 102 í fjölbrautaskóla

Vandi og ávinningur

Í greininni er fjallað um rannsókn á hægferðaráfanganum Stærðfræði 102 í fjölbrautaskóla. Kannað var námsbrautaval nemenda og viðhorf þeirra til árangurs síns í stærðfræði með spurningalista og kennslustundir í tveimur hópum voru teknar upp á myndbönd í einum skóla. Auk þess voru skoðaðar kennsluáætlanir og lokapróf í áfanganum í fimm skólum. Niðurstöður sýndu að rúmur helmingur nemenda taldi sér ekki ganga vel í stærðfræði, tæp 60% skráðra nemenda mætti að jafnaði í tíma á meðan rannsókn stóð yfir og nemendur gengu oft út úr kennslustundum. Ennfremur kom í ljós ósamræmi samanborið við *Aðalnámskrá – Stærðfræði 1999*, lengra var farið í algebru en námskráin sagði fyrir um í fjórum skólum af fimm en hvergi var tíma varið í samvinnuverkefni eða ritgerðir. Ræddar eru mögulegar orsakir þessa. Lagt er út af kenningum Niss um stærðfræðilega hæfni og ástæður samfélags fyrir menntun í stærðfræði og kenningum Mellin-Olsens um ástæður nemenda fyrir stærðfræðinámi. Settar eru fram hugmyndir að opnum verkefnum sem gætu virkjað nemendur og skýrt fyrir þeim tilgang stærðfræðimenntunar ásamt dæmum um umræðuefni sem gætu örvað stærðfræðilega hugsun.

Höfundur er dósent í stærðfræðimenntun við Menntavísindasvið Háskóla Íslands.

Mathematics for all – Problems and advantages of comprehensive schools

This paper examines the implementation of the slow-pace course Mathematics 102 in the comprehensive upper secondary school. Students' choice of study streams, their views on own performance and their behavior in class in one school was explored empirically, based on a questionnaire and video recordings. Furthermore, study plans and final examinations in five schools were surveyed. Results revealed that more than 50% of the students felt themselves as low-achievers in math, their average attendance was below 60% and they left classes frequently during lessons. Significant discrepancy between the national curriculum and the final examinations was also found in the five schools. The paper discusses possible reasons for this. The results are related to theories by Niss about mathematical competences and fundamental reasons for mathematics education and to Mellin-Olsen's theories on students' rationale for mathematics learning. The paper contains proposals on project work which might provide the students with a rationale for their studies and topics that may enhance mathematical class discussions.

The author is an associate professor at the School of Education, University of Iceland.

Inngangur

Grein þessi fjallar um rannsókn á útfærslu áfangans Stærðfræði 102 í fjölbrautaskóla. Byggt er á eftirfarandi gögnum:

- Áfangalýsingu í *Aðalnámskrá framhaldsskóla – Stærðfræði 1999*.
- Myndbandsupptökum í tveimur hópum í Stærðfræði 102 í einum skóla.
- Könnun meðal nemenda í tveimur hópum í Stærðfræði 102 og tveimur hópum í Stærðfræði 203 í sama skóla.
- Könnun í fimm fjölbrautaskólum á inntaki kennsluáætlana og prófa í Stærðfræði 102.

Beitt var tölfræðilegum aðferðum ásamt því að vitnað er í námskrá, heimildir um hugmyndafræði fjölbrautaskóla og rit fræðimanna um stærðfræðimenntun.

Spurningin sem rannsóknin beinist að er þessi:

Hvað má álykta af tilviksrannsókn í einum skóla um námsáform nemenda í áfanganum Stærðfræði 102 í fjölbrautaskóla, ástundun þeirra og gagn af námi í áfanganum?

Ítarleg námskrá í stærðfræði fyrir framhaldsskóla kom út árið 1999, *Aðalnámskrá framhaldsskóla – Stærðfræði* (Menntamálaráðuneytið 1999b), en í maí 2011 tók gildi *Aðalnámskrá framhaldsskóla* (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2011) þar sem lærdómsviðmið í stærðfræði og fleiri námsgreinum fylgja sem viðaukar. Í *Aðalnámskrá* 1999 var stærðfræði skipt niður í áfanga sem bera tiltekinn fjölda eininga en lærdómsviðmiðin 2011 eru grunnur að vinnu skólanna til að skipa námsefninu niður á þann hátt sem þeir kjósa. Grein þessari er ætlað að vera innlegg í umræðu um nýskipan námsins samkvæmt lærdómsviðmiðunum.

Stærðfræðimenntun

Samfélagslegar ástæður og rök fyrir stærðfræðimenntun

Nokkrar meginástæður eru fyrir því að samfélag heldur úti menntun í stærðfræði. Þessar ástæður, sem einnig eru oft notaðar sem rök fyrir viðhaldi stærðfræðimenntunar og réttlæting fyrir stöðu hennar, eru að mati Niss (1996, bls. 13) að stærðfræðimenntun

- stuðlar að tæknilegri, félagslegri og efnahagslegri þróun samfélagsins
- stuðlar að þróun og viðhaldi menningar
- eflir hæfni einstaklinga til að takast á við nám, starf, einkalíf, félagslíf og borgaralega þátttöku í samfélaginu.

Niss telur að í samfélögum þar sem lýðræðisleg hefð er ríkjandi, svo sem á Norður-löndum, hafi þung áhersla verið lögð á hið síðastnefnda, að efla stærðfræðilega hæfni einstaklingsins til að vera virkur og gagnrýninn þátttakandi í samfélaginu (Niss, 1996, bls. 24). Það eru meginrök fyrir því að allir skuli njóta stærðfræðimenntunar, einnig á efri skólastigum og einnig þeir sem ekki stefna á nám þar sem krafist er sérkunnáttu í stærðfræði.

Stærðfræðileg hæfni

Danska menntamálaráðuneytið bað nefnd, sem skipuð var í upphafi aldarinnar, um að segja til um að hve miklu leyti þurfi að endurnýja stærðfræðimenntun í Danmörku og hvers konar stærðfræðilega hæfni þyrfti að efla meðal nemenda á hinum ýmsu skóla-

stigum. Svar nefndarinnar var skýrslan *Kompetencer og matematiklæring / Hæfni og stærðfræðináms* (Niss og Jensen, 2002), oft nefnd KOM-skýrslan. Mörg svaranna áttu vel við íslenskar aðstæður (Kristín Bjarnadóttir, 2003). Í skýrslunni er lögð sérstök áhersla á að stærðfræði á iðn- og starfsbrautum sé í samræmi við markmið brauta (Niss og Jensen, 2002, bls. 25). Rætt verður hvernig gengur að framfylgja því markmiði í áfangakerfi.

KOM-skýrslan gerði einnig skil þeirri hæfni sem kennarar þurfa að afla sér. Þar sagði að kennarar þurfi að þroska með sér hæfni til að meta, setja sig inn í, greina og taka afstöðu til gildandi námskrár og til að geta hrint hinum ólíku undirmarkmiðum í framkvæmd í kennslu sinni fyrir nemendur á mismunandi stigum með yfirmarkmiðin í huga. Einnig þurfi kennarar að temja sér hæfni til að hugsa fyrir og skipuleggja kennslu með mismunandi tilgang og markmið þar sem tekið er mið af eiginleikum og þörfum nemendanna. Velja þurfi viðeigandi verkefni, kennslutæki og námsefni, hafa samráð við nemendur um fyrirkomulag kennslunnar og huga að hvatningu og örvun til nemenda (Niss og Jensen, 2002, bls. 73–109; Kristín Bjarnadóttir, 2003). Þetta má túlka svo að það sé hlutverk einstakra kennara að skipuleggja kennsluna sjálfir út frá eigin nemendahópi en láta ekki kennslubækur stjórna vali verkefna.

Ástæður nemenda fyrir stærðfræðinámi

Norðmaðurinn Stieg Mellin-Olsen var höfundur kenningar um *tækishyggju* (*instrumentalism*) sem menntunarfræðilegs hugtaks (Mellin-Olsen, 1981). Hann skilgreindi tvær ástæður fyrir því að nemendur læri stærðfræði og nefndi þær S-ástæðu og I-ástæðu. S-ástæðu, félagslega ástæðu (S: social), sagði hann kvikna hjá nemanda ef saman fara hugmyndir hans um sjálfan sig, vit hans á skóla og skólanámi, og hugmyndir hans um hvað sé markverð þekking og farsæl framtíð í félagslegu umhverfi hans. S-ástæðan sé því félagslega háð. Nemendur af ólíkum uppruna, úr sveit eða bæ eða af ólíkum stéttum, upplifa námsefni í skóla á ólíkan hátt. Þeir hafi því oft ólíkar hugmyndir um hvað sé markverð þekking og þess vegna ólíkar S-ástæður.

Hinar ólíku hugmyndir skipta máli fyrir nám og valda þess vegna vanda þeim sem eiga að sjá um skipan menntunar. Yfirleitt er leitast við að hanna námsefni sem hæfir sem flestum nemendum og veitir jafnframt menntun sem er ekki án samhengis við annað, nám eða félagslegt umhverfi. Mellin-Olsen taldi þetta valda meginþversögn í rekstri framhaldsskóla undir einu þaki eins og fjölbrautaskóla. Vægðarlausasti vandí, sem námsefnishöfundur standi frammi fyrir, sé að reyna að hanna námsefni sem hentar öllum nemendum. Átök geti komið upp milli ólíkra sjónarmiða. Þau endurspeglar í spurningum og staðhæfingum nemenda og foreldra þeirra, eins og „Hvers vegna erum við að læra þessa algebru?“ „Börnin okkar þurfa bara að læra prósentureikning.“ „Ósköp læra börnin lítið í þessum skóla ...“, o.s.frv. Algengt sé líka, sagði Mellin-Olsen, að kennarar segi nemendum að þeir hafi gott af að læra stærðfræði og nemendur beri svo mikið traust til kennarans að þeir trúu því þótt þeir skynji ekki sjálfir hvað sé svona gott.

Mellin-Olsen greindi aðra ástæðu fyrir námi sem nær út fyrir námsefnið, ástæðu sem tengir skólann við tæki (instrument) til að skapa sér „góða“ framtíð. Hún skapi nám sem grundvallast á tækishyggju (instrumentalism), það er að segja nám sem ber ekki vott um neinn áhuga á innihaldinu sjálfu en er til að sýnast; sýna fram á þekkingu til að öðlast hrós kennarans og síðan góða einkunn eða góða prófgráðu. Þetta sé I-ástæðan, tækis-ástæðan; skólanámið sé tæki til að komast áfram. Stærðfræðin er þá eingöngu tengd skólaumhverfinu, nemendur sjá engin tengsl við ytra umhverfi og hún hefur þar enga merkingu. En tækishyggjan geri það að verkum, sagði Mellin-Olsen, að nemandi sinni námsgreininni þrátt fyrir það svo lengi sem von sé um að það gefi nokkuð í aðra hönd. Stundum vinni tækisástæðan með félagslegu ástæðunni, stundum togi þær í gagnstæða

átt. Algengast sé, sagði Mellin-Olsen, að S-ástæður og I-ástæður skarist í námshópi. Viðfangsefni námsefnishöfunda og kennara sé að gera skörunina sem mesta.

Hlutverk I-ástæðunnar taldi Mellin-Olsen greinilegast í tilvikum nemenda sem eiga erfitt með stærðfræðinám. Hann nefndi dæmi um nemanda sem hverfur frá námi af því að hann sér ekki merkingu í stærðfræðinni, hefur enga S-ástæðu. Hann hefur líka gefið upp vonina um framgang; I-ástæðan er fjarri. Enginn hefur séð hann læra neitt árum saman í skóla. Eygi hann aftur á móti möguleika á námssamningi í iðnnámi bitur hann á jaxlinn og ræðst á námsefnið sem hann fékkst ekki til að sinna áður. Þar sé I-ástæðan að verki. Annað dæmi sem Mellin-Olsen nefndi er stuðningskennsla þar sem hann sagði oftast gagnslaust að nota sömu kennsluáðferðir og sama námsefni og það sem nemandinn réði ekki við. Þá geti verið eina leiðin að höfða til nemandans með S-ástæðunni, verkefnum sem varða hann einhverju, hafi hann gefið upp framavonir, I-ástæðuna.

Mellin-Olsen lagði til að notuð væru yfirgripsmikil, samsett verkefni, sem taka gjarnan meira en eina kennslustund, til að reyna að fá nemendur til að líta á stærðfræðina sem gagnlegt verkfæri. Hann rakti dæmi um hvernig samfélagsleg verkefni, t.d. um búsetumál, geti vakið nemendur til umhugsunar og áhuga á samfélagsmálum og þátt stærðfræðinnar í að skýra þau. Samvinna um efni sem vekur sameiginlegan áhuga geti sameinað nemendur með ólíkar S-ástæður. Hún geti vakið upp nýjar S-ástæður, gert samþættingu við aðrar námsgreinar sýnilega og skýrt hlutverk stærðfræðinnar. Vissulega sé undirbúnings-tími kennarans þáttur sem kennarar nefni oft sem fyrirstöðu. Rök gegn fyrirstöðunni séu þó til dæmis að nemendur geti unnið hluta undirbúningsins og þegar undirbúningi sé lokið krefjist verkefnið lítillar vinnu utan kennslustunda.

Áfangakerfið

Upphaf og hugmyndafræði áfangakerfisins

Margir nýir skólar voru stofnaðir á Íslandi á tuttugu ára tímabili, um það bil 1965–1985. Flestir voru fjölbrautaskólar með áfangakerfi. Gjarnan var kveðið á um að fjölbrautaskóli yrði ekki stofnaður án þess að iðnnámsbrautir féllu innan hans (sjá t.d. Ólaf Ásgeirsson, 1990, bls. 55). Fjölbrautaskólar í kaupstöðum voru oft byggðir á grunni iðnskóla þar sem hentugt þótti vegna fámennis að sameina allt nám á framhaldsstigi undir einn hatt. Kennslukraftar nýttust betur þar sem safna mátti fleiri nemendum í hópa en ella. Menn vonuðu einnig að sambýli ólíkra menntaleiða yrði til að auka skilning milli stétta. Skýrslan *Sameinaður framhaldsskóli* (Fræðsluskrifstofa Reykjavíkur, 1971) var undanfari Fjölbrautaskólans í Breiðholti. Þar segir að hinum sameinaða skóla hafi m.a. verið ætlað

að binda enda á það, að nemendum sé við ákveðinn aldur skipað í skóla, þar sem þeir eru í eitt skipti fyrir öll útilokaðir frá tilteknum námsbrautum;

að gefa nemendum tækifæri til að fresta endanlegu námsbrautarvali og jafna þannig aðstöðu þeirra til að velja sér námsbraut í sem fyllstu samræmi við þann áhuga og þá getu, sem vaxandi þroski þeirra kann að leiða í ljós;

að gera námsbrautum jafnhátt undir höfði og draga úr því vanmati og vanrækslu á tilteknum námsbrautum, sem skipting námsbrauta milli ólíkra og aðskildra skólagerða virðist jafnan hafa í för með sér;

að hamla gegn því – með því að vanda sem best til allra námsbrauta – að gáfnafar eitt ráði vali námsbrautar og tilteknar stéttir og starfsgreinar eigi þannig á hættu að fara varhluta af þeim skerfi af almennum gáfnaforða þjóðarinnar, sem er réttur þeirra og nauðsyn;

að efla gagnkvæman skilning og virðingu starfsgreina og stétta með því að sjá öllum nemendum, án tillits til námsbrautar, fyrir *sem mestri sameiginlegri reynslu á námsferli þeirra*.

Hinn sameiginlegi skóli missir marks, ef hann í stað þess að vera *einn* skóli er einungis samsafn aðskildra og ólíkra skóla undir einu þaki.

(Fræðsluskrifstofa Reykjavíkur, 1971, bls. 12–13).

Samkensla ólíkra námsbrauta hafði þannig bæði félagsleg og fjárhagsleg markmið. Það var yfirlýst markmið að efla gagnkvæman skilning og virðingu starfsgreina og stétta og að fresta endanlegu námsbrautavali.

Áfangakerfi mótaðist af óskum um hreyfanleika. Nemendur gætu hafið nám í einum skóla, ef til vill í heimabyggð sinni, og nýtt það í framhaldsnámi í öðrum skóla, eða skipt um námsbraut (Kristján Bersi Ólafsson, 1990). Þetta tengdist fleiri straumum. Guðmundur Arnlaugsson, stærðfræðingur og rektor Menntaskólans við Hamrahlíð, innleiddi áfangakerfið í íslenska skóla, en einnig „nýju“ stærðfræðina (Kristín Bjarnadóttir, 2006, bls. 254–269). Hann taldi sjónarmið, sem talin höfðu verið hagnýt, hafa ráðið of miklu. Reikningur hafi einkum verið kenndur til þess að menn láti ekki hlunnfara sig í viðskiptum en ekki vegna þess að hann hafi gildi í sjálfum sér (Guðmundur Arnlaugsson, 1967, bls. 42–43). Það að stærðfræðin hafi gildi í sjálfri sér og síður skyldi láta hagnýt sjónarmið ráða var hluti af hugmyndafræði „nýju“ stærðfræðinnar. Hún styður fyrirkomulagið að kenna nemendum með ólík framtíðaráform sama námsefni þar sem ekki er lögð áhersla á hagnýtingu stærðfræðinnar á ólíkum sviðum.

Áfanginn Stærðfræði 102

Nemendur innritast allajafna í framhaldsskóla á haustönn. Þeir koma inn í skólann með mjög misjafnan undirbúning og er því víða skipt í hópa eftir árangri í grunnskóla (sjá t.d. heimasíður Fjölbrautaskólans í Garðabæ og Fjölbrautaskóla Vesturlands á Akranesi). Nemendur sem hafa hlotið góðar einkunnir í stærðfræði í grunnskóla hafa tekið Stærðfræði 103 á haustönn og haldið síðan áfram í Stærðfræði 203 á vorönn.

Nemendur með miðlungsárangur (t.d. 4,5–6,5) hafa tekið hægferð, Stærðfræði 102, á haustönn og þeir sem ekki náðu því tóku undirbúningsáfangu og héldu síðan inn í hægferðina á vorönn. Falli nemendur í Stærðfræði 102 á haustönn hafa þeir endurtekið áfangann á vorönn og sameinast þá hópnum sem lauk upprifjunaráfanga á haustönn. Oft voru því saman komnir í Stærðfræði 102 á vorönn nemendur sem hafði ekki gengið vel í stærðfræði og að jafnaði verr en nemendum í Stærðfræði 102 á haustönn.

Viðmið fyrir fjárveitingar til kennslu í framhaldsskóla eru 25 nemendur í hóp samkvæmt reiknilíkani fyrir framhaldsskóla (Ólafur Sigurðsson, 2008, bls. 39). Viðmið almennrar brautar er 15 nemendur en áfanginn Stærðfræði 102 er þvert á brautir og viðmiðið gildir því ekki um hann þótt nemendur almennrar brautar í mörgum skólum taki hann. Áfanginn er því væntanlega í flestum tilvikum fullskipaður 25 nemendum í byrjun annar.

Áfanginn Stærðfræði 103 eða hægferðarígildi hans, Stærðfræði 102–122, var sameiginlegur öllum bóknámsbrautum, og flestum námsbrautum til sveinsprófs samkvæmt *Aðalnámskrá framhaldsskóla – Almennum hluta* (Menntamálaráðuneytið, 1999a, bls. 63–116) en einstaka iðn- og starfsbrautir hafa einungis krafist Stærðfræði 102. Í inngangi að áfangalýsingu Stærðfræði 102 í *Aðalnámskrá framhaldsskóla – Stærðfræði* 1999 segir:

Lagður er grunnur að vinnubrögðum í stærðfræði, nákvæmni í framsetningu, röksemdafærslum og lausnum verkefna og þrauta. Meginviðfangsefni eru upp-

rifjun á talnameðferð og jöfnur. Enn fremur er fjallað um hnitakerfið og jöfnu beinnar línu. Áhersla er lögð á að varpa ljósi á hlutfallshugtakið frá mörgum hliðum.

Auk styttri verkefna vinni nemendur a.m.k. eitt samvinnuverkefni eða ritgerð, t.d. um hagnýtingu stærðfræðinnar í daglegu lífi. (Menntamálaráðuneytið, 1999b, bls. 33).

Margir skólar hafa einungis birt inngang áfangalýsingarinnar á heimasíðum sínum. Ekki er þar minnst á algebru. Í ítarlegri lýsingu *Aðalnámskrár* á Stærðfræði 102 segir um algebru:

kunni undirstöðuatriði algebru, nánar tiltekið

- skilji hvernig bókstafir eru notaðir til þess að tákna stærðir
- geti dregið saman liði, margfaldað upp úr svigum og tekið út fyrir sviga
- geti þáttað annars stigs margliður í margfeldi tveggja fyrsta stigs margliðna
- geti beitt reglunni um mismun tveggja ferninga á tölur og algebrustærðir

(Menntamálaráðuneytið, 1999b, bls. 34).

Flest atriðin í áfangalýsingunni hafa komið áður fyrir í grunnskóla en markmiðið er að nemendur æfist í að beita þeim, til dæmis í jöfnum. Gert er ráð fyrir röksemdafærslum og lausnum þrauta og að tími sé ætlaður til samvinnuverkefna eða ritgerða. Með slíkum viðfangsefnum má laga efnið að nokkru að markmiðum brauta sem nemendur hafa valið sér, jafnvel ólíkra brauta innan sama hóps. Algebrubrot eru ekki nefnd í lýsingu Stærðfræði 102. Þau koma fyrst fram í Stærðfræði 203 þar sem segir að nemendur skuli hafa fullt vald á bókstafareikningi (Menntamálaráðuneytið, 1999b, bls. 41).

Rannsóknin

Rannsóknaraðferð

Skólar

Valdir voru með hentugleikaúrtaki fimm fjölbrautaskólar sem starfa eftir áfangakerfi. Fjórir skólanna áttu aðild að *Námsvísi fjölbrautaskóla* (1983), 3. útgáfu. Fimmti skólinn hefur svipaða útfærslu áfangakerfis en er yngri en hinir. Skólarnir voru nefndir A, B, C, D og E.

Spurningalisti

Gerð var könnun með spurningalista meðal nemenda í tveimur hópum í Stærðfræði 102 og tveimur hópum í Stærðfræði 203 í skóla C á vorönn 2010 í marsmánuði. Nemendum var frjálst að svara könnuninni en enginn baðst undan því að svara. Spurningar úr könnuninni, sem notaðar voru í þessari rannsókn, eru svohljóðandi:

1. Hvers vegna valdir þú að fara á námsbrautina sem þú ert á?
2. Hvernig hefur þér vegnað í stærðfræði fram að þessum áfanga?
3. Hvernig hefur þér vegnað í stærðfræði í áfanganum?
4. Annað sem þú vilt taka fram.

Nemendur svöruðu spurningunum með eigin orðum og ekki var um að ræða val á milli ólíkra svarkosta. Rannsakandi flokkaði svör við spurningu 1 eins og fram kemur í *Töflu 2*. Svör við spurningum 2 og 3 voru flokkuð í þrennt eftir því hvort nemendur töldu að sér gengi eða hafi gengið vel, illa eða einhvern veginn þess á milli. Svörin eru sýnd í *Töflu 3*. Einungis voru valin svör við spurningu 4 sem varða efni þessarar rannsóknar.

Myndbandatökur

Rannsakandi tók tvær kennslustundir í Stærðfræði 102 upp á myndband í hvorum tveggja hópanna, hópi 1 og hópi 2, í skóla C. Spurningalisti var lagður fyrir í seinni kennslustundinni. Samkvæmt stundatöflum skólans var lengd kennslustunda 75 mínútur, en allar kennslustundirnar fjórar stóðu í um 60 mínútur. Kennslustofurnar voru breiðar en fremur grunnar. Borðum, sem voru 25 í hvorri stofu, var raðað þannig að nemendur sneru fram að töflu. Borðaraðir voru þrjár, en í annarri stofunni var hálf fjórða röð. Raðirnar skiptust í tvennt um miðju og voru þrjú til fjögur sæti hvorum megin. Í hópi 1 sátu áhugasamir nemendur fremst. Nemendur sátu þó ekki allir í sömu sætum í báðum kennslustundum sem teknar voru upp. Tvær myndbandstökuvélar voru í gangi í hverri kennslustund. Tökuvél 1 fylgdist jafnan með athöfnum kennarans. Henni var beint að nemendahópnum í heild eftir að kennari tók að aðstoða nemendur. Tökuvél 2 var beint að nemendahópnum. Þannig var nokkurn veginn unnt að fylgjast með öllum hópnum.

Rannsakandi teiknaði upp sätaskipan við úrvinnslu og gaf nemendum heitin P, Q, R o.áfr. Skráður var tími frá upphafi myndbands tökuvélar 1 þegar hver athöfn kennarans hófst. Athugandi skráði niður tíma frá upphafi myndbands tökuvélar 2, þegar nemandi gekk út úr kennslustofunni og síðan tímanna þegar nemandinn kom inn aftur. Farið var yfir myndbandið tvisvar í hvoru tilviki til að staðfesta rétta tímatöku. Myndband kennara var skoðað til samanburðar um ferðir nemenda. Mæling var skráð í mínútum og sekúndum en ætla má að náðst hafi að minnsta kosti 5s nákvæmni í tímamælingu. Tekið skal fram að í einstaka tilvikum sást ekki nema á öðru myndbandinu hvenær nemandi gekk fram eða kom til baka. Enn fremur þekkti rannsakandi ekki nemendur með nafni og bar því kennsl á nemendur út frá fatnaði og sætum þeirra.

Óformlegar og óskráðar viðræður áttu sér stað milli rannsakanda og kennara bæði fyrir, á milli og eftir kennslustundirnar þar sem málefni sem vörðuðu nemendur og almenna ástundun þeirra bar á góma. Nokkur atriði úr viðræðunum koma fram í *Töflu 4* ásamt upplýsingum um ferðir nemenda út úr tímum.

Kennsluáætlanir og próf í áfanganum Stærðfræði 102

Kennsluáætlanir skólanna fimm, sem voru allar frá vorönn 2010, voru skoðaðar með tilliti til þess hvort sinnt væri í framangreindum skólum námsþættinum „Auk styttri verkefna vinni nemendur a.m.k. eitt samvinnuverkefni eða ritgerð, t.d. um hagnýtingu stærðfræðinnar í daglegu lífi.“

Lokapróf áfangans voru allt frá vori 2008 til hausts 2010. Gera má ráð fyrir að prófin breytist ekki að ráði frá önn til annar þar sem þau verða að vera sambærileg, að minnsta kosti innan hvers skóla. Nemendur í hópi 2 í myndbandsupptöku í skóla C æfðu sig til dæmis á gömlum prófum. Prófin voru greind með tilliti til hlutfalls algebru og algebrubrota.

Niðurstöður

Svör við spurningalista

Alls svöruðu 30 nemendur í Stærðfræði 102 og 41 nemandi í Stærðfræði 203 spurningalistanum. Upplýsingar, sem lesa mátti af svörum nemenda um námsbrautir þeirra, eru settar fram í *Töflu 2*. Ekki kom alltaf skýrt fram hvaða námsbraut nemendur höfðu valið vegna þess hvernig spurningin var orðuð. Þrátt fyrir það kemur fram skýr munur á námsbrautavali nemenda í Stærðfræði 102 og 203 í *Töflu 1*.

Tafla 1 – Námsbrautir 30 nemenda í STÆ 102 og 41 nemanda í STÆ 203		
	STÆ 102	STÆ 203
Félagsfræðibraut, málabraut	4	2
Náttúrufræðibraut	0	25
Iðnnám, starfsnám	7	0
Almenn braut	9	0
Segja ekki	10	14

Fæstir nemendanna í Stærðfræði 102 stunda nám á bóknámsbrautum og enginn á náttúrufræðibraut. Nemendur nefndu m.a. hárgreiðslubraut og hestamenskubraut. Rúm 60% nemenda í Stærðfræði 203 stunda á hinn bóginn nám á náttúrufræðibraut.

Tafla 2 – Skoðanir nemenda á hvernig þeim hafi vegnað í stærðfræði fram að þessum áfanga og í áfanganum nú				
	Stærðfræði 102		Stærðfræði 203	
	Fram að þessu	Nú	Fram að þessu	Nú
Illa, ekki vel	17	7	4	4
Sæmilega	2	10	6	16
Vel, ágætlega	10	11	31	21
Svara ekki	1	2	0	0

Úr *Töflu 2* má lesa að meira en helmingur nemenda í Stærðfræði 102 telur að sér hafi gengið illa eða ekki vel fram að þessum áfanga. Þeir eru þó sumir vonbetri nú. Aðeins um 10% nemenda í Stærðfræði 203 telja að sér hafi gengið illa og 76% að sér hafi gengið vel fram að áfanganum Stærðfræði 203. Nemendur virðast þó margir, eða 16 (39%), telja að brugðið geti til beggja vona í Stærðfræði 203 enda þyngist stærðfræðin þar nokkuð, gagnstætt Stærðfræði 102 sem er að mörgu leyti upprifjun úr grunnskóla.

Tveir nemendur í Stærðfræði 102 svöruðu 5. lið könnuninnar svo:

Vill láta leggja „almenna“ stærðfræði sem kjarnaáfanga niður. Nægja ætti að nemendur gætu sýnt fram á almenna kunnáttu í samlagningu, frádrætti, margföldun og deilingu. Hægt væri að bjóða upp á flóknari stærðfræði fyrir nemendur sem vilja vera stærðfræðingar eða eitthvað slíkt. Einnig mætti lífga upp á þessa drepleiðinlegu vinnubók.

Hætta að kenna algebru. Kenna almenna stærðfræði eða þá að flokka stærðfræði í flokka (algebra, jöfnur og svo framvegis).

Enginn nemandi í Stærðfræði 203 kaus að taka annað fram.

Myndbandatökur

Nemendur voru lesnir upp í öllum tímum. Í hópi 1 var verið að fara í bókstafajöfnur í báðum kennslustundum. Kennari leiddi nemendur í gegnum fimm dæmi í um það bil 35 mínútur í báðum tímum, og gekk milli nemenda þess á milli og á eftir. Hann hafði nokkurn veginn undan beiðnum um aðstoð. Kennari nefndi að ein jafnan tengdist rafmagnsfræði en tengdi efnið ekki við annað nám að öðru leyti, enda voru nemendur á mismunandi námsbrautum.

Fyrri tíminn í hópi 2 fór í jöfnu beinnar línu sem kynnt hafði verið daginn áður. Kennari kenndi við töfluna í 27 mínútur, gekk síðan á milli nemenda en fór oft aftur að töflunni í skýringardæmið. Í seinni tímanum var upprifjun og engin kennsla frá töflu. Úthlutað var gömlu prófi með lausnum á vinstri hlið opnu þar sem prófdæmin voru hægra megin. Kennari gekk milli nemenda eftir óskum þeirra en skipti sér ekki af öðrum nemendum. Hann gaf hverjum nemanda góðan tíma en náði engan veginn að sinna öllum beiðnum.

Nokkur ummæli kennaranna um vandkvæði í kennslu ásamt niðurstöðum af því sem rannsakandi sá á myndböndunum og öðrum rökstuðningi eru tekin saman í *Töflu 3*.

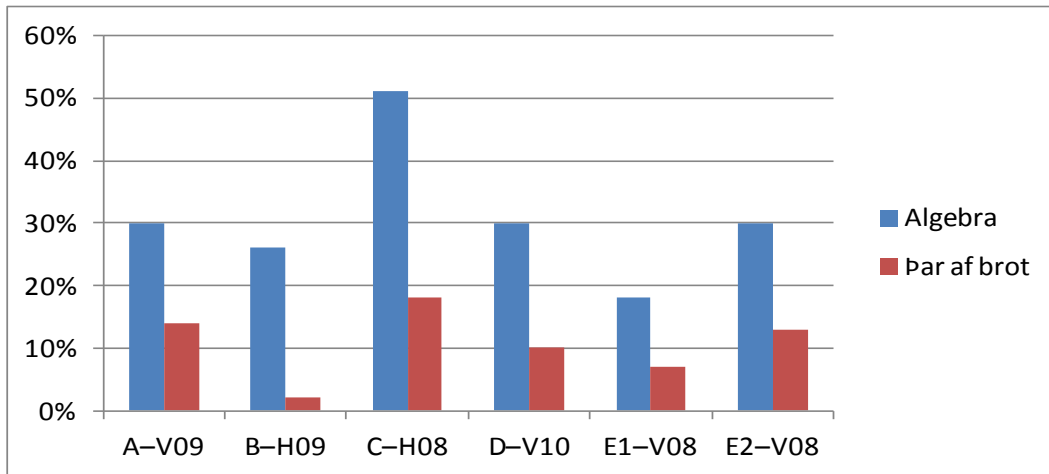
Tafla 3 Vandkvæði í kennslu STÆ 102	
Ummæli kennari um vandkvæði og athugun rannsakanda	Skýringar rannsakanda og niðurstöður rannsóknar
1. Nemendur kunna lítið af því sem þeir áttu að læra í grunnskóla.	Nemendur í STÆ 102 hafa einungis náð 6,5 eða lægri einkunn í stærðfræði í grunnskóla.
2. Nemendur mæta illa í tíma, sumir í dag, aðrir á morgun og kenna þarf sama efnið aftur og aftur.	Hópur 1: 28 skráðir; 16 voru fyrri dag, 18 seinni dag. Hópur 2: 25 skráðir; 16 voru fyrri dag, 13 seinni dag.
3. Nemendur fara fram úr tíma og eru sumir lengi frammi.	Hópur 1: <i>Fyrri dagur:</i> Fimm fóru út. Einn var úti í 31 mín., einn í 16 mín., meðaltími hinna þriggja var tæpar 5 mín. <i>Seinni dagur:</i> Ellefu fóru út. Einn var úti í 16 mín., einn í 14 mín., meðaltími hinna níu var 5 ½ mín. Hópur 2: <i>Fyrri dagur:</i> Sex fóru út, einn kom ekki aftur, meðaltími hinna fimm var tæpar 5 mín. <i>Seinni dagur:</i> Sjö fóru út, einn var úti í 24 mín., meðaltími hinna sex var tæpar 4 mín.
4. Þó að nemendur mæti í tíma fylgjast þeir illa með.	Flestir virðast fylgjast með töflu framan af tíma og skrifa upp það sem þar stendur. Þegar frjáls vinna hefst fara margir nemendur að vinna en einstaka fara að teikna, skrifa upp gefnar lausnir eða skreppa fram.
5. Ekki má reka nemendur, þá missir skólinn greiðslur fyrir þreyttar einingar.	Aðeins er greitt fyrir þá nemendur sem mæta til prófs.

Sjá má af lið 3 í *Töflu 3* að nemendur eru töluvert á faraldsfæti í kennslustundum. Flestir eru aðeins burtu í um fimm mínútur en einstaka nemendur virðast missa af stórum hluta kennslustundarinnar þótt skráðir séu mættir. Erfitt var að greina hvort sömu nemendur eru mættir í báðar kennslustundir, sbr. lið 2 í *Töflu 3*. Þó má álykta að tveir nemendur að minnsta kosti í hópi 1 mættu seinni daginn en voru fjarstaddir fyrri daginn, og að minnsta kosti þrír, sem mættir voru fyrri daginn í hópi 2, voru fjarstaddir seinni daginn. Meðalmætning miðað við skráðan fjölda nemenda var 59%.

Kennsluáætlanir og lokapróf

Samvinnuverkefni, ritgerðir eða önnur viðameiri verkefni en þjálfunardæmi komu hvergi fram í kennsluáætlunum skólanna fimm fyrir Stærðfræði 102.

Hlutfall algebrubrota í hverju lokaprófi var talið sérstaklega og er sett fram á *Mynd 1*. Tvö mismunandi próf voru haldin í skóla E.



Mynd 1 – Hluti brota í algebrudæmum á lokaprófum fimm fjölbrautaskóla í STÆ 102

Prófað var úr algebrubrotum, sem tilheyra Stærðfræði 203 samkvæmt *Aðalnámskrá*, í Stærðfræði 102 í fjórum skólanna. Ekki var prófað úr algebrubrotum í skóla B.

Umræða

Um rannsóknina

Spurningalistinn var lagður fyrir í marsmánuði 2010 um leið og kennslustundirnar voru teknar upp á myndband. Nemendur sem sitja í Stærðfræði 102 á vorönn eru gjarnan þeir sem hafa fallið í sama áfanga á haustönn og eru að endurtaka hann eða hafa náð upp-rifjunaráfanga á haustönn. Þar er því líklegt að saman séu komnir nemendur sem farið hafa halloka í stærðfræði. Þetta er staðfest í niðurstöðum í *Töflu 2*. Nemendur í Stærðfræði 102 telja að sér hafi gengið mun verr í stærðfræði en nemendur í Stærðfræði 203 telja að sér hafi gengið. Lesa má af *Töflu 1* að nemendur í Stærðfræði 102 stunda ekki nám á braut þar sem áhersla er lögð á fræðilega stærðfræði og algebrubrot eins og gert er á náttúrufræðibraut. Raunar eru margir óákveðnir og eru skráðir á almenna braut. Því er vert að spyrja hvort kennt sé efni sem eflir hæfni einstaklinga í Stærðfræði 102 til náms, starfs eða til að vera virkur og gagnrýninn þátttakandi í samfélaginu eins og Niss (1996) bendir á að sé ein meginástæða samfélagsins fyrir að veita menntun í stærðfræði. Hugleiða má hvort ekki sé rétt að sjá þessum hópi fyrir annars konar verkefnum en algebrubrotum.

Myndbandatökurnar sýna nemendur í Stærðfræði 102 sem hóp og ekki er unnt að greina ástæður einstakra nemenda fyrir því að þeir stundi þetta nám. Margir hafa eflaust l-ástæðu Mellin-Olsens fyrir því, námið er liður í að útskrifast úr skólanum, hvort sem er af hárgreiðslubraut, hestamenskubraut eða annarri braut sem þeir stefna á að ljúka, en kemur námsáformum nemenda ekki við að öðru leyti.

Kennarar í Stærðfræði 102 kvarta yfir að þurfa að kenna sama efnið aftur og aftur þar sem ekki allir nemendur, sem mættir eru hverju sinni, hafa verið í tímanum á undan, sbr. *Töflu 3*, lið 2. Eigi þorri nemenda erfitt með stærðfræði geta endurtekingar verið gagnlegar. Mellin-Olsen bendir þó á að til lítils sé að endurtaka sömu skýringarnar í stuðningskennslu. Ýmislegt bendir til að endurtekin kennsla nægi ekki í framangreindum hópum. Einstaka nemendur sjást beita sýndaraðferðum sem bera merki um uppgjöf, og virðast hvorki hafa l-ástæður né S-ástæður Mellin-Olsens fyrir námi sínu, sbr. lið 4 í *Töflu 3*. Mellin-Olsen taldi að ráðlegt væri að reyna að vekja S-ástæður með nemendum sem þurfa á stuðningi að halda. Þá þarf að þekkja til umhverfis nemenda og hugarheims. Námsefnið þyrfti að vera staðbundið fremur en samræmdar kennslubækur sem beina

athygli að einberum kjarna stærðfræðinnar. Með nokkurri hugkvæmni mætti útbúa verkefni innan ramma áfangalýsingar Stærðfræði 102, tengd tæknidrifnu samfélagi samtímans, verkefni sem gætu kveikt áhuga að minnsta kosti sumra nemenda og veitt þeim S-ástaðu Mellin-Olsens fyrir námi sínu.

Sjá má merki um þreytu nemenda og spurning er hvort þeim séu sköpuð hagstæð skilyrði til náms. Margir nemendur fóru fram úr tímum, eins og lesa má af lið 3 í *Töflu 3* og kennslustundir voru stytta úr 75 mínútum í 60 mínútur. Eigi að kenna sömu námsgrein í tveimur eða fleiri samliggjandi kennslustundum væri hlé milli kennslustunda vert íhugunar. Fjörutíu mínútna kennslustundir eru gömul hefð sem gæti átt sér gild rök.

Greinilegt er að í engum skólanna var kennt samkvæmt lýsingu í *Aðalnámskrá*. Hvergi var gert ráð fyrir samvinnuverkefnum og ritgerðum. Mun meiri áhersla en ætlað er í námskrá var lögð á algebrubrot með liðastærðum í nefnara í fjórum skólum af fimm. Í óformlegum viðræðum við kennara í tveimur skólum, þar af öðrum utan skólanna fimm, komu fram þau rök að ómögulegt sé að vita hvert nemendur muni stefna í námi sínu í framtíðinni, þeim eigi ef til vill eftir að snúast hugur síðar og þeir geti þá þurft á algebrukunnáttu að halda. Þessi rök minna á frásögn Mellin-Olsens um að kennarar segi nemendum að það sé gott fyrir þá að læra stærðfræði þótt nemendur sjái ekki í hverju gæðin séu fólgin. Votta sér fyrir því í svörum tveggja nemenda í Stærðfræði 102 við 5. spurningu spurningalistans.

Kennslubækurnar eru ritaðar með það fyrir augum að þær hæfi námsáföngum þar sem saman eru komnir nemendur á öllum brautum. Inntakið er því ekki miðað við hagnýtingu stærðfræðinnar á neinu sérstöku sviði heldur við það að nemendur geti haldið áfram námi á hvaða braut sem er. Námssefnið er lagað að fræðilegum áherslum náttúrufræðibrautar til að loka ekki leiðum nemenda ef þeim skyldi snúast hugur í vali á námsleiðum en síður að námsmarkmiðum einstakra iðn- og starfsbrauta. Nemendur í Stærðfræði 102, sem eru ekki á náttúrufræðibraut, verða því að heimfæra þekkinguna sjálfir á námsval sitt.

Af framangreindu má álykta að erfitt er að laga námsgrein að markmiðum námsbrautar og sérnáms nemenda í samræmdum skóla. Þar er lögð áhersla á að loka ekki leiðum nemenda og fresta endanlegu námsbrautarvali en sjá nemendum fyrir sem mestri sameiginlegri reynslu á námsferli þeirra, eins og kemur fram í skýrslunni *Sameinaður framhaldsskóli* (Fræðsluskrifstofa Reykjavíkur, 1971). Þetta kemur heim og saman við kenningu Mellin-Olsens um erfiðleika við að hanna námsefni sem hæfir öllum nemendum og jafnframt að veita menntun sem er ekki án samhengis við annað, nám eða félagslegt umhverfi. Mellin-Olsen taldi það valda meginþversögn í rekstri framhaldsskóla undir einu þaki eins og fjölbrautaskóli er. Fjölbrautaskólar með áfangakerfi, þar sem nemendur á ólíkum brautum sitja saman í áfanga, eru þó víða forsenda þess að nemendur geti stundað nám í heimabyggð sinni á Íslandi. Hér er því um að ræða togstreitu, árekstra hagsmuna, sem taka þarf tillit til þegar námsefni er hannað.

Tillögur fræðimanna

Kennarar eru ekki bundnir af kennslubókum með aragrúa stakstæðra æfinga- og þjálfunardæma án samhengis við raunheiminn, hugarheim nemenda eða framtíðaráform. Áfangalýsingar kveða ekki á um það. KOM-skýrslan hvetur kennara til að meta, greina og taka afstöðu til gildandi námskrár með tilliti til nemenda á mismunandi stigum og skipuleggja kennslu þar sem tekið er mið af eiginleikum og þörfum nemendanna (Niss og Jensen, 2002, bls. 73–109).

Kennslu í Stærðfræði 102 mætti útfæra með yfirgrípsmeiri verkefnum en tíðkast hafa. Nýta má áður lærð atriði til að leysa viðfangsefni sem tengjast umhverfi nemenda og markmiðum brauta sem þeir hafa kosið sér. Sérstaklega er bent á það með setningunni

„nemendur vinni a.m.k. eitt samvinnuverkefni eða ritgerð“ í lýsingu áfangans. Rétt valin verkefni gætu sameinað nemendur með samvinnu um efni sem vekur sameiginlegan áhuga. Mellin-Olsen telur að þau geti vakið upp S-ástæður hjá nemendum, gert samþættingu við aðrar námsgreinar sýnilega og skýrt hlutverk stærðfræðinnar.

KOM-skýrslan birtir dæmi um verkefni sem talin eru geta örvað hæfni til að vinna stærðfræðileg verkefni upp úr hráum gögnum sem nemendur afla sjálfir. Hér á eftir fara dæmi um kveikjur að verkefnum sem geta þróast í ólíkar áttir eftir því hvernig kennari stýrir þeim og nemendur takast á við þau:

- Skipulagning, íbúðar, bílastæðis eða annars út frá gefnum útlínum/flatarmáli.
- Hve margar vindmyllur framleiða jafnmikið rafmagn og Sogsvirkjun eða Kárahnjúkavirkjun, hver er stofnkostnaður og rekstrarkostnaður á vindmyllu, o.s.frv.?
- Hvað er sjóndeildarhringurinn langt í burtu?
- Hver er hallinn á turni þegar hann er um það bil að velta?
- Hvað kostar að tala í farsíma? Samanburður á ólíkum kostum.
- Hvernig er hægt að sigla á seglbáti í aðra átt en vindurinn stefnir?
- Áætlun um neysla barna, unglinga og fullorðinna á mat um tiltekinn tíma þar sem gætt er að orkuþörf og réttu magni næringarefna.
- Orkuþörf reiðhesta, sauðfjár, s.s. lambáa og geldfjár.
- Er hægt að koma öllum Íslendingum/jarðarbúum fyrir á Heimaey?
- Hve oft er hægt að bursta tennurnar með tannkremi úr einni túbu?
- Hver er hagstæðasta leiðin til að fjármagna bílakaup eða ávaxta sumarkaup? (Niss og Jensen, 2002, bls. 208–209, 252–253, aukið og staðfært).

Sum verkefnanna mætti útfæra í tölvuforritum, t.d. í stærðfræðiforritinu *Geo-Gebra* (Freyja Hreinsdóttir, 2009). Hugmyndum má safna úr dagblöðum og tímaritum eða úr verkefnasöfnum. *Math2Earth – Bringing Mathematics to Earth* (Ulovec, 2008) er dæmi um verkefnasafn á netinu. Kennarar geta valið það sem þeim þykir henta sínum nemendahópi í samráði við nemendur.

Ekki má þó gera ráð fyrir að nýjar gerðir verkefna geri kraftaverk og hrífi nemendur umsvifalaust. Eftir tíu ára nám hafa nemendur mótaðar hugmyndir um hvers konar verkefni eigi við í stærðfræði og hver séu hlutverk nemenda og kennarans (Cobb og Yackel, 1996; Kristín Bjarnadóttir, 2010). Hlutverk kennarans breytist við vinnu af framangreindu tagi frá því að vera sá sem upplýsir og veit svörin til þess að vera sá sem tryggir að allir skilji til hvers sé ætlast og veitir síðan nægilegar vísbendingar til að viðhalda áhuga nemenda en skilur jafnframt hæfilega mikið eftir handa nemendum til að glíma við. Breytingin getur verið vandasöm, bæði fyrir nemendur og kennara.

Af myndböndunum og kennslubókunum má sjá að nemendur voru að æfa tiltekna aðferðir. Ekki sást raunverulegar umræður en setja verður þann fyrirvara að einungis voru skoðaðar tvær kennslustundir í tveimur hópum. Höfundar KOM-skýrslunnar telja hæfni til stærðfræðilegrar hugsunar vera einn átta mikilvægra þátta stærðfræðilegrar hæfni. Þeir nefna nokkur dæmi um umræðuefni sem örvað gætu stærðfræðilega hugsun:

- Hvers vegna er mínus sinnum mínus plús?
- Er til slétt prímtala?
- Hvers vegna má ekki deila með núlli?
- Hvers vegna má ekki margfalda báðar hliðar jöfnu með núlli?
- Hvers vegna er 0,10 minna en 0,9 þegar 0,10 hefur fleiri aukastafi?
- Hvers vegna er $2^0 = 1$? – Ætti svarið ekki að vera 0 ef 2 er margfaldaðir núll sinnum með sjálfum sér?

(Niss og Jensen, 2002, bls. 198 og 245).

Sum þessara efna eru tekin sem sjálfsagðir hlutir en þau hafa verið hluti af glímu mannsins við stærðfræðileg hugtök um aldir. Það er ekki „bara regla“ að ekki sé unnt að deila með núlli. Umræður af þessu tagi endrum og eins gætu varpað nýju ljósi á hlutverk og eiginleika stærðfræðinnar í hugum nemenda.

Lokaorð

Rannsóknin sem hér hefur verið lýst sýnir að kennsla áfangans Stærðfræði 102 samræmdist ekki lýsingu *Aðalnámskrár* 1999 í þeim skólum sem rannsóknin beindist að. Meiri algebra en ætlað var í námskránni var kennd í fjórum skólanna, og samvinnuverkefni eða ritgerðir, sem *Aðalnámskrá* mælir fyrir um, voru ekki lögð fyrir. Af tilviksrannsókn í einum skóla er einnig dregin sú ályktun að hluti nemenda þar ástundi námið slaklega og hafi af áfanganum lítið gagn, hvort sem er í tengslum við annað nám á námsbraut sinni, framtíðaráform eða til að þökast áfram í skólastiganum.

Fjölbrautaskólarnir í fjölmörgum byggðarlögum um land allt hafa auðgað samfélög sín. Ávinningur af starfi þeirra er óumdeildur en skólunum er vandi á höndum þegar þjóna þarf nemendum á ólíkum námsbrautum í einum hópi. Verkefni sem lögð eru fyrir þurfa því að vera opin og auðvelt að breyta þeim frá einum hópi til annars. Í greininni er stungið upp á viðfangsefnum sem fræðimenn hafa bent á sem tæki til að grípa hugi nemenda og veita þeim ástæðu til að sjá gagn af stærðfræðináminu. Gagnið ætti ekki aðeins að vera fólgið í að færast nær brautskráningu úr skóla, heldur einnig að stærðfræðin verði hverjum einstaklingi notadrjúgt tæki, hvort sem er í námi, framtíðarstarfi eða gagnrýninni þátttöku í þjóðmálum.

Margir nemendur koma vanbúnir í stærðfræði úr grunnskóla. Framhaldsskólinn ætti að bjóða upp á nám sem nemendur finna sig í og mæta þeim þar sem þeir eru. Annars verður námið merkingarlaust, stuðlar að neikvæðu viðhorfi og nemendur missa af því að stærðfræðin verði þeim gagnlegt verkfæri. Almenn umræða og sátt þarf að skapast um hvers konar nám dregur fram og eflir þá hæfni sem býr nemendur sem best undir lífið.

Heimildir

Cobb, P. og Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31, 175–190.

Freyja Hreinsdóttir. (2009). Geogebra. *Flatarmál*, 16(2), 12–16.

Fræðsluskrifstofa Reykjavíkur. (1971). *Sameinaður framhaldsskóli. Tillögur og greinargerð Fræðsluráðs Reykjavíkur um stofnun tilraunaskóla á gagnfræða- og menntaskólastigi*. Reykjavík: Höfundur.

Guðmundur Arnlaugsson. (1967). Ný viðhorf í reikningskennslu. *Menntamál*, 40 (1).

Heimasíða FG, Fjölbrautaskólans í Garðabæ. *Námsvísir*. (2009). Röðun í grunnáfangi, bls. 16. Áfangar í stærðfræði, bls. 185–197. <http://www.fg.is/namid/namsvisir/>. Sótt 26. september, 2010.

Heimasíða FVA, Fjölbrautaskóla Vesturlands á Akranesi. Um stærðfræðiáfangi við FVA. http://www.fva.is/~staerdfv/tolvufr/namskr/stae_skv_nyju_nskr.htm. Sótt 26. september, 2010.

- Kristín Bjarnadóttir. (2003). Menntun stærðfræðikennara, námsmat og stærðfræðileg hæfni. *Netla – Vef tímarit um uppeldi og menntun*. <http://netla.khi.is/greinar/2003/009/index.htm>. Sótt 29. október, 2011.
- Kristín Bjarnadóttir. (2006). *Mathematical education in Iceland in historical context – Socio-economic demands and influences*. Reykjavík: Háskólaútgáfan. Einnig að finna á http://rudar.ruc.dk/bitstream/1800/2914/1/Chapter0_IMFUFA.pdf.
- Kristín Bjarnadóttir. (2010). Góð stærðfræðikennsla og bragur í kennslustundum: Sýn nemenda í framhaldsskólum. *Ráðstefnurit Netlu – Menntakvika 2010*. Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Sótt af <http://netla.khi.is/menntakvika2010/alm/019.pdf> 18. júlí 2011.
- Kristján Bersi Ólafsson. (1990). Þegar við Jón Böðvarsson urðum mafíubræður. Í Jón F. Hjartarson og Ólafur Ásgeirsson (ritstjórar), *Jarteinabók Jóns Böðvarssonar*, bls. 67–77. Reykjavík: Iðnskólaútgáfan.
- Mellin-Olsen, S. (1981). Instrumentalism as an educational concept. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 351–367.
- Mennta- og menningarmálaráðuneytið. (2011). *Námskrá fyrir framhaldsskóla. Almennur hluti*. Reykjavík: Höfundur.
- Menntamálaráðuneytið. (1999a). *Aðalnámskrá framhaldsskóla – Almennur hluti*. Reykjavík: Höfundur.
- Menntamálaráðuneytið. (1999b). *Aðalnámskrá framhaldsskóla – Stærðfræði*. Reykjavík: Höfundur.
- Námsvísir fjölbrautaskóla*. (1983). 3. útgáfa. Reykjavík: Iðnskólaútgáfan.
- Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. Í *International handbook of mathematics education*. Part I, bls. 11–47. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Niss M. og Jensen, T. H. (ritstj.). (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Kaupmannahöfn: Undervisningsministeriet. Einnig á <http://pub.uvm.dk/2002/kom/>.
- Ólafur Ásgeirsson. (1990). Aðdragandi að stofnun fjölbrautaskóla á Akranesi. Í Jón F. Hjartarson og Ólafur Ásgeirsson, *Jarteinabók Jóns Böðvarssonar*, bls. 45–66. Reykjavík: Iðnskólaútgáfan.
- Ólafur Sigurðsson. (2008). *Opinber stjórnsýsla*. Lokaverkefni til meistaraþrúfs í opinberri stjórnsýslu. Háskóli Íslands: Félagsvísindadeild.
- Ulovec, A. (ritstj.). (2008). *Math2Earth – Bringing mathematics to Earth*. European Commission: Education, Audiovisual and Culture Executive Agency, Comenius. Sótt af 30. október, 2011.



Kristín Bjarnadóttir. (2011).
Stærðfræði 102 í fjölbrautaskóla: Vandí og ávinningur.
Netla – Vef tímarit um uppeldi og menntun. Menntavísindasvið Háskóla Íslands.
Sótt af <http://netla.khi.is/greinar/2011/ryn/008.pdf>