



Ritrýnd grein birt 31. desember 2012

Kristín Bjarnadóttir

„Nýja stærðfræðin“

Uppruni og afdrif

Hreyfingar stærðfræðinga, sálfræðinga og kennara um endurbætur á stærðfræðikennslu urðu til í Evrópu og Bandaríkjunum eftir 1950. Meginhreyfingin var kennd við „nýja stærðfræði“. Skólastærðfræði var sett fram á máli mengja- og rökfræði í anda stefnu franskra stærðfræðinga sem kenndu sig við dulnefnið Bourbaki og vildu samræma ritun allra greina stærðfræðinnar með áherslu á formgerð. Jean Piaget taldi vera samsvörun milli formgerðar stærðfræðinnar og hugarstarfs barna. OEEC, síðar OECD, boðaði að menntun efldi félagslegar og efnahagslegar framfarir og skipulagði fund aðildarríkja um endurbætur á stærðfræðikennslu í Royaumont í Frakklandi í nóvember 1959. Hreyfingin breiddist út og Norðurlandabúar tóku að rita sameiginlegt tilraunanámsefni. Tilraunir um nýstærðfræði hófust á Íslandi árið 1964 með bandarísku námsefni í menntaskóla. Tilraunir hófust síðar í barna- og unglingadeildum og árið 1968 var nýstærðfræðilegt efni orðið útbreitt í íslenskum skólum. Íslendingar áttu ekki aðild að norræna samstarfinu en þýddu námsefni þess fyrir barna- og unglingadeildir. Annað var frumsamið. Norrænt, breskt og bandarískt efni var notað í menntaskólunum. Furðu hefur vakið hve góðar undirtektir það fékk víða um lönd að kenna börnum og unglingum mengjastærðfræði. Talið var að verkefni myndu þjálfa rökhugsun barnanna og að foreldrar mættu ekki rugla börnin. Stefnan leið undir lok á tæpum áratug en skildi eftir varanleg nýmæli. Þegar litið er til Íslands, Danmerkur og Noregs sést að stefnan átti mikið undir frumkvæði einstaklinga í öllum löndunum. Í Noregi voru gerðar afmarkaðar tilraunir og ný námskrá var ekki samþykkt fyrr en dregið hafði úr áhrifum nýstærðfræðinnar. Á Íslandi varð tilraunastarf allt of umfangsmikið og námskrár voru aðeins í drögum. Vinnan við nýju stærðfræðina kveikti þó áhuga margra kennara og veitti þeim nýja sýn á skólastærðfræði.

Höfundur er dósent í stærðfræðimenntun við Menntavísindasvið Háskóla Íslands.

“New Math”: Origin and fate

Reform movements of mathematicians, psychologists and mathematics teachers were formed in the 1950s in Europe and the United States. The main currents were termed “New Math” and “Mathématique moderne”. School mathematics was to be presented within the framework of logic and set theory according to the Bourbakists, a group of French mathematicians who aimed at uniting all branches of mathematics by emphasizing its structure. Jean Piaget assumed a correspondance between the structures of modern mathematics and the child’s mind. OEEC, later OECD, supported theories that education enhanced social and economic progress and organized a meeting on school mathematics reform at Royaumont, France, in November 1959. The movement spread, and experimental

syllabi were written cooperatively in the Nordic countries. Experiments on the New Math began in Iceland in 1964 by introducing an American textbook in one of the high schools. Experiments at primary and lower secondary level followed, and in 1968 modern mathematics syllabi had been widely implemented at all school levels. Icelanders did not participate in the Nordic cooperation but translated Nordic textbooks for the primary and lower secondary school levels. Other material was home-made. Nordic, British and American materials were used in high schools. Surprisingly, teaching set-theoretical mathematics to children and adolescents was universally accepted with excitement. The material was supposed to train children's logical thinking, and parents' intervention was thought to cause confusion. The movement declined within a decade but left some permanent novelties. Comparisons with Denmark and Norway reveal that the movement was driven by individuals' initiatives in all the countries. Most Icelandic experiments were under direct influence from Denmark. Restricted experiments were undertaken in Norway, and a new national curriculum document was not implemented until the New Math wave had declined. In Iceland, the experiments became too extensive and only draft documents on New Math were ever published within the national curriculum. The work on the New Math, however, sparked enthusiasm in many teachers and offered them a new perspective on school mathematics.

The author is associate professor at the School of Education, University of Iceland.

Inngangur

„Nýja stærðfræðin“ hélt innreið sína á Íslandi á sjöunda áratug tuttugustu aldar, mörgum að óvörum, og var að mestu horfin fimmtán árum síðar. Spurningar vakna:

- Hvað var „nýja stærðfræðin“ og hvaðan kom hún?
- Hvenær kom hún, hverjir stóðu að komu hennar og hvers vegna?
- Hvernig var hún og hvernig voru aðstæðurnar sem hún mætti?
- Var atburðarásin á Íslandi svipuð því sem gerðist í nágrannalöndunum?

Rannsóknin er sagnfræðileg: stuðst verður við heimildir svo sem rit fræðimanna, kennslubækur, skýrslur, dreifibréf og viðtöl. Anna Kristjánsdóttir (1996) og Kristín Bjarnadóttir (2006, 2007, í prentun) hafa ritað um nýju stærðfræðina og verður vitnað í skrif þeirra og erlendra fræðimanna. Gerð verður nánari grein en áður hefur komið fram í skrifum íslenskra höfunda fyrir uppruna nýju stærðfræðinnar í Evrópu, í hverju aðkoma sálfræðingsins Jean Piaget var fólgin og niðurstöðum afdrifaríks fundar í Royaumont árið 1959.

Uppruni nýstærðfræðinnar

Hreyfingu um „skóla fyrir alla“ óx fylgi þegar kom fram á sjötta áratug tuttugustu aldar og henni fylgdi „stærðfræði fyrir alla“. En hvers konar stærðfræði var það?

Stærðfræðikunnáttu óbreyttra hermanna og sérfræðinga í Bandaríkjaher þótti ábótavant. Talið var að áherslum í menntun stærðfræðinga þyrfti að breyta, m.a. með tilliti til þróunar dulmálslykla. Hefðbundið menntaskólaefni hæfði ekki kröfum tímans og bil þótti vera milli stærðfræði sem kennd var í háskólum og menntaskólum. Tilraun um ritun texta til kennslu í líkindareikningi í bandarískum skólum þótti sýna að unnt væri að stofna til farsæls samstarfs stærðfræðinga og kennara um námsefnisgerð. Tilraunin hafði mikil áhrif á síðari tilraunaverkefni (Osborne og Crosswhite, 1970).

Til varð víðtæk endurskoðunarhreyfing kennd við „nýja stærðfræði“ þar sem stærðfræðingar voru í fararbroddi en sálfræðingurinn Jerome Bruner var virkur þátttakandi. Önnur hreyfing af sama meiddi kom upp í frönskumælandi Evrópu í samtökum stærðfræðinga,

kennara og sálfræðinga. Þriðja endurskoðunarhreyfingin reis í Englandi þar sem náms-efni *School Mathematics Project*, *SMP-námsefnið*, hlaut mesta útbreiðslu.

CIEAEM og Piaget

Áhugasamir einstaklingar stofnuðu samtök um endurbætur á stærðfræðikennslu, Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, CIEAEM, árið 1950 (CIEAEM, e.d.). Meðal stofnfélaga voru svissneski þroskasálfræðingurinn Jean Piaget, upphaflega menntaður í náttúrufræði og heimspeki, stærðfræðingarnir Jean Dieudonné og Gustave Choquet frá Frakklandi og Hans Freudenthal frá Hollandi, auk skólafólksins Emmu Castelnuovo frá Ítalíu, Lucienne Felix frá Frakklandi og Willy Servais frá Belgíu. Dieudonné var fulltrúi stærðfræðinga sem fengust við að rita undir dulnefninu Bourbaki heildaryfirlit allrar þekktrar stærðfræði þar sem mörk milli ólíkra sviða stærðfræðinnar voru þurrkuð út. Meginhugtak Bourbaki-hópsins var formgerð (e. *structure*) og þeir nefndu viðfangsefni sitt *Mathématique Moderne* eða *nýstærðfræði*. Piaget var forstöðumaður Alþjóðauppeldismiðstöðvarinnar, International Bureau of Education, IBE, í Genf, sem rann inn í Menningarstofnun Sameinuðu þjóðanna, UNESCO árið 1969. Piaget rannsakaði tengsl milli formgerðar hugarstarfsins og hinnar stærðfræðilegu formgerðar Bourbaki-hópsins. Freudenthal gagnrýndi fljótlega rannsóknir Piagets sem hann sagði athyglisverðar en taldi varhugavert að tengja þær við stærðfræðinám þar sem bakgrunnur Piagets í stærðfræði væri fremur veikur. Ennfremur endurspegluðu rannsóknir Piagets varla aðstæður í kennslustofu heldur hinar óvenjulegu aðstæður í tilraunastofu sálfræðings (Furinghetti, Menghini, Arzarello og Giacardi, 2008).



Mynd 1 – Jean Piaget



Mynd 2 – Jean Dieudonné

Félagar í CIEAEM vildu skapa þverfaglega samræðu fræðimanna og uppálenda: sálfræðinga, stærðfræðinga og kennara, og rannsaka skilyrði þess að bæta stærðfræðikennslu. Helstu umræðuefni þeirra voru:

- þáttur sálfræði í stærðfræðimenntun
- kennsluaðferðir
- lykilhlutverk áþreifanlegra kennslugagna
- þörf fyrir að taka öll skólastig (frá barnaskólum til háskóla) til athugunar
- rannsóknir byggðar á athugunum
- venslin milli hugsanaferla og stærðfræðilegrar formgerðar

Samtökin gáfu út áhugaverðar bækur. Hin fyrsta, sem Piaget, Dieudonné o.fl. rituðu árið 1955, *L'enseignement des mathématiques*, fjallaði um þau tækifæri sem nýja stærðfræðin byði í stærðfræðikennslu: kjarni stærðfræðinnar væri rökfærsla um óhlutbundin efni. Þótt sértekning (e. *abstraction*) væri erfið viðfangs taldi Dieudonné að ekki væri rétt að fresta henni. Nauðsynlegt væri að kynna raunverulega stærðfræði fyrir unglíngum þegar formgerð hugarstarfs þeirra væri orðin mótuð. Aðrir höfundar ræddu áþreifanleg kennslugögn eins og Cuisinare-kubba, pinnabretti og kvikmyndir (Furinghetti o.fl., 2008). Athygli vekur þó að Dieudonné, sem hafði afar mikil áhrif á stærðfræðikennslu víða um heim, hafði sjálfur lítinn áhuga á kennslu heldur beindist áhugi hans fyrst og fremst að rannsóknnum í stærðfræði (University of St. Andrews, e.d.). Samtökin höfðu mikil áhrif, sérstaklega í frönskumælandi Evrópu og á Ítalíu.

Bandaríkin, Spútnik og Bruner

Spútnik var skotið á loft árið 1957 og bandaríska þjóðin varð fyrir áfalli. Yfirvöld brugðust hart við og sett voru lög, *National Defense Education Act* (e.d.), árið 1958 um stórákinn stuðning við menntun í stærðfræði og raungreinum og hvatningu til nemenda um að stunda þessar greinar. Þá þegar hafði mikil umræða farið fram, sér í lagi um kennslu nemenda sem stefndu á háskólanám. Stærðfræði sem kennd var í menntaskólum var talin gamaldags og úr tengslum við háskólastærðfræði (OEEC, 1961, bls. 105–106). Nokkur tilraunaverkefni voru tilbúin. Spútnik-áfallið var hvorki orsök endurskoðunarinnar né hafði það áhrif á innihald endurskoðunar á námsefni sem fylgdi í kjölfarið en það varð til þess að auka útbreiðslu hennar stórlega (Gjone, 1983). Forseti alþjóðasamtaka um stærðfræðimenntun, International Commission on Mathematics Instruction, ICMI, Edward Begle, prófessor við Yale-háskóla, stýrði stærsta og útbreiddasta verkefninu, School Mathematics Study Group, SMSG, sem var sett á laggirnar árið 1958. Það var ætlað nemendum á sjöunda til tólfta námsári og var í fyrstu ætlað nemendum sem stefndu á háskólanám en var síðar útfært fyrir alla nemendur og ennfremur innleitt á barnaskólastigi (Briscoe Center for American History, vefsíða). Áður en yfir lauk hafði það verið þýtt á fimmtán tungumál en framleiðslu þess var hætt árið 1972 (Gjone, 1983).

Tvær afdrifaríkar ráðstefnur voru haldnar árið 1959. Hin fyrri var haldin í Woods Hole í Massachusetts í Bandaríkjunum þar sem saman komu sálfræðingar, stærðfræðingar og uppeldisfræðingar. Sálfræðingurinn Jerome Bruner stýrði ráðstefnunni en hann hafði túlkað að kenningar Piaget fyrir Bandaríkjamönnum (Kilpatrick, 1992). Edward Begle var meðal þátttakenda. Skýrslan um ráðstefnuna, *The Process of Education* (Bruner, 1960), fjallaði m.a. um formgerðir og uppgötvunarnám og Bruner setti þar fram hugmynd sína um vefjunámsefnið (e. *spiral curriculum*). Gestur ráðstefnunnar var Bärbel Inhelder, náninn samverkamaður Jean Piaget. CIEAEM-hreyfingin í Evrópu og hreyfingin um nýju stærðfræðina í Bandaríkjunum, “New Math”, áttu sameiginlegar rætur í Bourbaki-skólanum; draga átti fram mengjafræði, föll, vensl, rökfræði og formgerð í nýju námsefni studdu kenningum um uppgötvunarnám (Furinghetti o.fl., 2008).

Royaumont-fundurinn

Ráðstefnan í Royaumont í Frakklandi í nóvember 1959 var haldin á vegum Stofnunar um efnahagssamstarf Evrópuríkja, OEEC, forvera OECD, Efnahags- og framfarastofnunarinnar. Þrjú fulltrúar frá hverju aðildarlandi voru boðnir; framúrskarandi stærðfræðingur, fulltrúi menntunar stærðfræðikennara eða yfirmaður úr menntamálaráðuneyti, og framúrskarandi menntaskólakennari (OEEC, 1961, bls. 7). Öll aðildarlöndin sendu fulltrúa nema Ísland, Portúgal og Spánn. Ráðstefnuna sóttu margir áhrifamestu forvígismenn nýju stærðfræðinnar. Meðal þrettán frummælenda voru Dieudonné og Choquet, fulltrúar Bourbaki-hópsins og Servais og Felix, fulltrúar skólafélks í CIEAEM, Edward G. Begle stjórnandi SMSG-verkefnisins, og Svend Bundgaard prófessor í stærðfræði við Árósháskóla.

Í niðurstöðum fundarins segir að þótt fyrst og fremst hafi verið einblínt á kennslu nemenda sem teldust hæfir til háskólanáms væri einnig hugað að þörfum þjóðfélagsins og markmið stærðfræðikennslunnar á framhaldsskólastigi væri ekki að framleiða stærðfræðinga. Hagnýting stærðfræði, þarfir vísindamanna á öllum sviðum, þarfir leikmanna, tenging stærðfræði við aðrar vísindagreinar og tenging menntaskólanáms við háskólanám væru höfuðefni áforma um nýbreytni í stærðfræðikennslu og -námi (OEEC, 1961, bls. 105).

Mælt var með því við aðildarlöndin að þurrka út mörk algebru og rúmfræði. Kenna skyldi nútímaalgebru og mengjafræði en einnig hagnýta stærðfræði: líkinda- og tölfræði, endanlega stærðfræði (e. *finite mathematical structures*) línulega bestun (e. *linear programming*). Stefnan ætti erindi til allra, einnig þeirra sem stefndu ekki á nám þar sem stærðfræði væri undirstaða (OEEC, 1961, bls. 105–107).

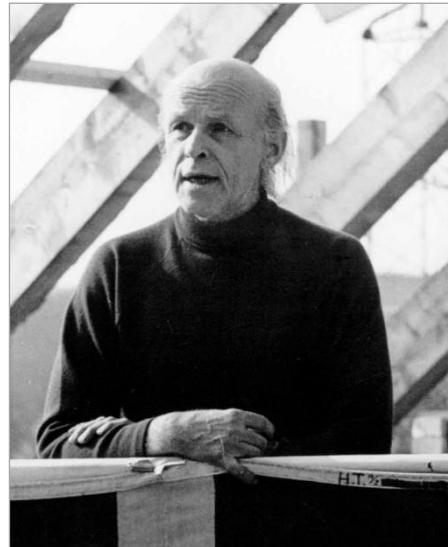
Þekking á sálfræðilegum forsendum náms og breytingar á markmiðum skólstarfs í átt að því að þróa hugtök og hugsanaferli yrðu að leiða til samsvarandi breytinga á reikningskennslu. Námið yrði að verða afrakstur skilnings sem skapaðist við tilraunir og uppgötvunir undir handleiðslu. Þannig yrði að leiða börn að sértekningu þess eiginleika mengis sem nefnist „tala“ og nota til þess hugmyndir en ekki endilega málfar um mengi, hlutmengi, samsvörun og röðun. Skilningur á sætistalnaritun í tugakerfi væri nauðsynlegur þáttur í námi byrjenda. Skýrum börnum mætti kynna talnavensl eins og frumtölur, þáttun, stærsta sambátt og grunntölur í öðrum sætiskerfum en tíu frá og með fimmta skólaári (OEEC, 1961, bls. 108–109).

Samstarf Norðurlandþjóða, NKMM

Fulltrúar aðildarlandanna voru hvattir til að taka upp samstarf sín á milli. Danir, Norðmenn, Svíar og Finnar hófu formlegt samstarf um námsefnisgerð með skipun fjögurra fulltrúa frá hverju landi í nefnd á vegum Norðurlandaráðs, Nordiska komittén för moderniseringen af matematikundervisningen, NKMM, í júní 1960. Nefndin lét semja námsefni fyrir alla aldursflokka sem síðan skyldi þýtt á tungumál landanna. Norræna nefndin skilaði lokaskýrslu, *Nordisk Skolmatematik* (1967), þar sem Bent Christiansen, prófessor við Kennaraháskólann í Kaupmannahöfn, var höfundur markmiðsskilgreininga stærðfræðikennslunnar.



Mynd 3 – Bent Christiansen



Mynd 4 – Svend Bundgaard

Svíarnir Gunnar Bergendal, Ove Hemer og Nils Sander rituðu árið 1970 rúmfræði fyrir unglingastigið, *Geometri 70: grundskolans högstadium*. Bergendal ritaði einnig um svipað

leyti kennslubókaröð fyrir menntaskóla með þeim Matts Håstad og Lennart Råde. Danirnir Erik Kristensen og Ole Rindung, sem sótt hafði Royaumont-fundinn, rituðu námsefni fyrir menntaskóla. Danski kennarinn Agnete Bundgaard, systir Svends Bundgaard og finnska konan Eeva Kyttä rituðu saman námsefni fyrir fyrstu tvö ár barnaskólans og Agnete lauk síðan við verkið fyrir allt upp í sjötta bekk. Barnaskólanám hófst þá við sjö ára aldur, bæði á Íslandi og í Danmörku.

Aðstæður á Íslandi

Lítill hreyfing virðist hafa verið á fræðslumálum fram yfir 1960. Fræðslumálastjórn einbeitti sér að því að byggja nýja skóla til að mæta lengingu skyldunámsins með lögum um skóla-kerfi og fræðsluskyldu nr. 22/1946 en lítt var hugað að þróun námsefnis. Ýmislegt átti þó eftir að koma upp á yfirborðið. Guðmundur Arnlaugsson (1961) menntaskólakennari ritaði grein í *Menntamál* um danska menntaskólann í deigluinni. Deigla íslenska menntaskólans var skammt framundan. *Námsskrá* (Menntamálaráðuneytið, 1960) með fræðslulögunum 1946 kom út vonum seinna. Kennari á Vesturlandi, Gestur O. Gestsson (1961a), taldi að þar væri reikningskennslan bundin í „reglingsviðjar“ sem próf hefðu spunnið. Síðar sagði Gestur (1961b) að reglingurinn hét einnig ítrodningur. Gagnrýniraddir voru að vakna.

Gestur O. Gestsson og áhrif CIEAEM

Gestur O. Gestsson skrifaði athygliverðar greinar um stærðfræðikennslu í *Menntamál*, málgagn kennarasamtakanna. Gestur nam í Alþýðuskólanum að Núpi í Dýrafirði 1910–1912. Hann lauk prófi frá Kennaraskólanum árið 1915 þar sem hann nam stærðfræði hjá Ólafi Daníelssyni stærðfræðingi. Hann kenndi síðan á Vesturlandi og var síðast skólastjóri í Flatey á Breiðafirði. Gestur gagnrýndi kennslubækur og setti fram tillögur um kennslu-tæki í greinum undir heitinu *Stærðfræðin* árin 1938 og 1939. Árið 1955 ritaði hann grein um alþýðuskóla þar sem hann gagnrýndi m.a. próf og skort á kennsluefni í eðlisfræði. Auk gagnrýni sinnar á námskrána 1960 gerði Gestur grein fyrir þingum IBE í Genf og áhrifum Piaget sem hann segir að hafi „öðru fremur, rannsakað þá þætti barnshugans, sem mestu ráða um raunhæfa þekkingarleit, og þá fyrst og fremst reikningsnám og náttúrufræða og haft um það samvinnu við aðra ágæta vísindamenn“ (Gestur O. Gestsson, 1961a, bls. 115). Hinir ágætu vísindamenn voru væntanlega félagar í CIEAEM.

Gestur sagði þing IBE árið 1950 hafa lagt til um kennslu barna fram að 11 ára aldri að þau fengju að treysta ný hugtök í verki og reyna gildi reikningsaðferða í leik og tilraunum og að beitt yrði flokkavinnu. Gestur hafði eftir Piaget að reikningur væri starf og yrði því aldrei kenndur með ítrodningi, barnið yrði að vinna á eigin spýtur.

Gestur greindi síðan frá ályktunum þings IBE árið 1956 um reikningskennslu 10–18 ára nemenda með tilmælum í mörgum liðum um stefnumörk, rúm á stundaskrá, námskrár, kennsluáðferðir og kennara. Reikningsnám væri réttur og hagur allra án tillits til kyns, stéttar, stöðu eða starfs. Reikningur með þeim hugsanamáta sem hann skapaði ætti að vera mikill þáttur í uppeldi hvers manns, jafnt þótt störf hans yrðu hvorki á sviði tækni né vísinda. Reikningskennslan, nátengd kennslu annarra fræða, ætti að opna augu nemenda fyrir hlutdeild reikningsins í vísindalegri lífsskoðun og heimsmynd vorra tíma (Gestur O. Gestsson, 1961a). Þessi afstaða rímar við tilmæli Royaumont-fundarins. Þar segir:

Breytingar á menningar-, iðnaðar- og efnahagsmynstrum margra þjóða kalla á grundvallarbreytingar á menntunarmynstri þeirra. Fleira fólk þarf að þjálfast betur í þekkingu á sviði raunvísinda. Jafnvel leikmenn [í raunvísindum] verða að fara að skilja raunvísindi; nú á dögum er kunnátta í stærðfræði grundvöllur þess að skilja raunvísindi. (OEEC, 1961, bls. 107)

Gestur lauk frásögninni með hugleiðingum um að stjórnendur fræðslumála vildu miða reikningskennsluna í alþýðuskólum (skyldunámið) við lægstu kröfur sem gerðar væru til afgreiðslufólks í sölubúðum. Þeir skildu ekki að telja sem afgreiðir í brauðbúð ætti rétt á að lifa eigin menningarlífi, taka þátt í þjóðmálum og verða góð móðir. Engu betur skildu þeir rétt annars vinnandi fólks (Gestur O. Gestsson, 1961a). Þar kvað við nýjan tón um réttindi og frelsi til náms öllum til handa.

Spurningalisti OEEC og menntun stærðfræðikennara

Spurningalisti var sendur út fyrir Royaumont-fundinn þar sem spurt var um aðstæður til stærðfræðikennslu. Svör bárust frá sautján löndum í Vestur-Evrópu ásamt Júgóslavíu, Kanada og Bandaríkjunum. Birgir Thorlacius ráðuneytisstjóri svaraði af Íslands hálfu (OEEC, 1961). Skólakerfin voru mörg og ólík. Ekki komu fram skil við 16–17 ára aldur á Íslandi milli unglingastigs, sem þá var nefnt framhaldsskólastig, og þáverandi menntaskóla, iðnskóla og annarra framhaldsskóla. Skólastigin voru því tvö: barnaskólastig (e. *primary level*) og framhaldsskólastig (e. *secondary level*). Kennslubækur á framhaldsskólastigi voru sagðar danskar, valdar af kennurunum en það átti við menntaskóla.

Fjöldi vikulegra kennslustunda í stærðfræði og tími ætlaður til heimavinnu var svipaður á Íslandi og í öðrum löndum á báðum skólastigum. Skólaárið var í styttra lagi eða svipað og í Portúgal og Tyrklandi en lengra en á Ítalíu og í Grikklandi. Annars staðar var skólaárið 2–7 vikum lengra. Svör bárust ekki frá Spáni.

Menntun barnakennaraefna í stærðfræði í aðildarlöndunum var yfirleitt minni en í menntaskólum og einskorðaðist við reikning samkvæmt svörum við spurningalista OEEC. Spurt var í skýrslunni hvort viturlegt væri að kennarar framtíðarinnar veldust við 14, 15 eða 16 ára aldur eins og tíðkaðist víða, til dæmis á Íslandi. Það breyttist með lögum nr. 38/1971 um Kennaraháskóla.

Kröfur um menntun stærðfræðikennara á skólastigum eftir sjötta skólaár á Íslandi voru sagðar jafngilda meistaraprófi í stærðfræði. Um 70–100% kennara í aðildarlöndunum uppfylltu þær kröfur nema aðeins 60% í Portúgal, 38% í Tyrklandi og 30% á Íslandi. Samt var ekki búist við skorti á kennurum á Íslandi árin 1960–1965. Þá voru aðstæður þannig að fimm kennarar við menntaskólana höfðu lokið slíku prófi í stærðfræði: Sigurkarl Stefánsson, Guðmundur Arnlaugsson, Björn Bjarnason, Jón Hafsteinn Jónsson og Skarphéðinn Pálmason. Nokkrir menn höfðu lokið prófi í eðlisfræði og kenndu stærðfræði við menntaskólana (Kristín Bjarnadóttir, 2006, bls. 239, 428). Heimsstyrjöldin lokaði leiðinni til Danmerkur þangað sem flestir fóru áður en nokkrir sóttu nám til Bandaríkjanna. Á næstu árum stækkaði þessi hópur nokkuð.

Unglingadeildir töldust samkvæmt framangreindri skilgreiningu til efra skólastigs. Samkvæmt lögum um gagnfræðanáms nr. 48/1946 skyldu kennarar hafa lokið uppeldis- og kennslufræði og eins til tveggja ára námi hið minnsta í kennslugrein við háskóla. Boðið var upp á nám í stærðfræði við Háskóla Íslands frá 1951. Sex manns höfðu lokið þar BA-námi með stærðfræði sem aðalgrein eða aukagrein árið 1959 (Háskóli Íslands. Skjalasafn. Prófbækur heimspekideildar.). Menntaskólar voru þá þrír og samanlagður nem-endafjöldi í þeim 1030. Stofnaðir höfðu verið unglingaskólar, miðskólar eða gagnfræðaskólar í flestum bæjum á Íslandi auk héraðsskóla og þar voru skráðir 7.922 nemendur (Guðmundur Jónsson og Magnús S. Magnússon, 1997). Ellefu kennarar með tilskilda menntun dugðu skammt til að kenna skaranum enda voru í hópi stærðfræðikennara við unglinga- og menntaskóla fjölmargir sem höfðu lokið hluta náms, t.d. í læknisfræði, lögfræði, verkfræði eða viðskiptafræði (Kristín Bjarnadóttir, 2006, bls. 189–191, 198).

Ætlunin með frumvarpi um kennaramenntun árið 1946 var að kennarar, sem menntast höfðu við Kennaraskóla Íslands, gætu notið framhaldsnáms í íslensku og stærðfræði við Háskóla Íslands. Svo varð þó ekki, samanber lög um menntun kennara nr. 16/1947. Í umsögn til menntamálanefndar neðri deildar Alþingis, undirritaðri af rektor Háskólans, segir að þar sé ekki rúm fyrir kennaradeild og kennslan í íslenskum fræðum, verkfræði og erlendum málum sem þar fari fram sé sniðin við annan undirbúning og aðrar þarfir en eigi við framhaldskennslu fyrir kennara (Skjalasafn Alþingis. Dagbók 45–46). Gert var ráð fyrir stúdentsprófi úr stærðfræðideild menntaskóla í verkfræðideild og undirbúningi í latínu til náms í íslenskum fræðum. Kennarar sem útskrifuðust úr Kennaraskólanum fengu ekki aðgang að Háskólanum fyrr en með lögum nr. 23/1963 sem kváðu á um eins árs nám í Kennaraskólanum í viðbót við kennaranámið til stúdentsprófs.

Námsefni í stærðfræði í barna- og unglingskólum var mestmegnis mótað fyrir 1930 (Kristín Bjarnadóttir, 2009) og stærðfræðideildir menntaskólanna störfuðu samkvæmt reglugerð nr. 3/1937 um Menntaskólann í Reykjavík, reglugerð sem aftur tók mið af danskri reglugerð frá 1904. Stöðnun námsefnis í stærðfræði hafði því ríkt um langa hríð á öllum skólastigum. Kennarar við barna- og unglingsstigi höfðu því vart kynnst nýjustu hugmyndum um sameiningu allrar stærðfræði undir merkjum mengjafræðinnar.

Nýja stærðfræðin á Íslandi

Umræða um nýju stærðfræðina vekur mörgum minningar um nýtt námsefni á barnaskólastigi en breytingarnar urðu mun víðtækari. Tilraunir fóru fram á þremur skólastigum og blönduðust breytingaferlum í skólakerfinu. Framhaldsskólastigið tók að þenjast út og níu ára heildstæður grunnskóli var í burðarliðnum þótt lög um skólakerfi nr. 55/1974 og lög um grunnskóla nr. 63/1974 yrðu ekki samþykkt fyrir en 1974 er nýja stærðfræðin hafði verið kennd í nokkur ár.

Íslendingar áttu enga aðild að Royaumont-fundinum aðra en svör við spurningalistanum sem áður var nefndur en fregnir bárust af fundinum eftir óbeinum leiðum. Jónas B. Jónsson fræðslustjóri í Reykjavík var áhugasamur um reikningskennslu. Hann ritaði leiðbeiningar í námskrá 1960 (Menntamálaráðuneytið, 1960) og kennsluefni fyrir yngstu börnin, bækurnar *Ég reikna* (1962) og *Ég reikna og líta* (1963). Hann sendi Kristján Sigtryggsson, umsjónarmann með reikningskennslu í Reykjavík og síðar skólustjóra Hvassaleitisskóla, til Noregs árið 1961 til að kynna sér þróunarstarf Norðmanna sem hófst með þátttöku í NKMM. Kristján dvaldist í Bandaríkjunum veturinn 1963–1964 og kynnti sér meðal annars SMSG-námsefnið. Hann kom með sýnishorn af því heim (Kristján Sigtryggsson, 1964).

Menntamálaráðherra, Gylfi Þ. Gíslason, var jafnframt viðskiptaráðherra. Árið 1965 var haldinn fundur um menntaáætlanagerð á vegum ráðuneyta Gylfa. Klaus Bahr, framkvæmdastjóri menntaáætlunar OECD, var gestur fundarins (Efnahagsstofnunin, 1965). Fundinn sátu helstu forystumenn menntamála, s.s. Helgi Elíasson fræðslumálastjóri, rektorar menntaskólanna og Kennaraskólans, Jónas B. Jónsson, og Guðmundur Arnlaugsson, áður kennari við Menntaskólann í Reykjavík, dósent í stærðfræði við Háskóla Íslands, námstjóri í stærðfræði í hálfu starfi og nýráðinn rektor Menntaskólans við Hamrahlíð. Á fundinum var hvatt til áætlanagerðar á sviði menntamála til að verja fjármunum til menntunar á sem hagkvæmastan hátt. Menntakerfið væri hluti af hagkerfinu. Menntun legði verulega til efnahagslegra og félagslegra framfara í þjóðfélaginu og væri engu síður þáttur í þjóðarhag en aðrir hefðbundnir þættir. Fræðslumálastjóri ræddi um að taka þyrfti tillit til vaxandi þarfa atvinnuveganna fyrir tæknimenntað fólk. Sveinbjörn Björnsson var þá að vinna að samanburði á námsefni í raungreinum og stærðfræði í íslenskum og norrænum skólum sem sýndi að íslenskt námsefni jafnaðist ekki á við hið norræna (Sveinbjörn Björnsson, 1966). Stærðfræði kom annars ekki til umræðu á fundinum sem fjallaði að mestu um efnahagslegan ávinning af menntun.

Menntaskólar

Guðmundur Arnlaugsson hafði dvalið í Danmörku öll stríðsárin 1939–1945 og þekkti marga sem tóku þar þátt í hinum nýju hræringum í námsefnisgerð, bæði Bent Christensen og Svend Bundgaard, frummælanda á Royaumont-fundinum. Svend var samtíða Guðmundi Arnlaugssyni í námi í stærðfræði við Kaupmannahafnarháskóla á árunum 1933–1935 og Svend kenndi þar síðar. Guðmundur var í orlofi frá kennslu haustið 1963 og ferðaðist þá bæði til Danmerkur og Bandaríkjanna til að kynna sér nýjungar í stærðfræðikennslu. Fyrsti sýnilegi afrakstur ferða Guðmundar var að taka kennslubókina *Principles of Mathematics* eftir Allendoerfer og Oakley (1963) upp í stærðfræðideild Menntaskólans í Reykjavík haustið 1964 en Allendoerfer tók þátt í Woods Hole-ráðstefnunni. Námsefni á fyrstu 123 síðunum af 465 var nýmæli; rökfræði, mengjafræði og inngangur að nútímaalgebru. Námsefni þetta var notað í fjögur ár (Allendoerfer og Oakley, 1963; *Skýrsla um Menntaskólann í Reykjavík*, 1964–1967).

Árið 1968 var tekið upp enska SMP-námsefnið (*Skýrsla um Menntaskólann í Reykjavík*). Það var að því leyti ólíkt bandaríska námsefninu að þar var meira leitast við að tengja efnið við hagnýta þætti fyrir áhrif fyrirtækja sem áttu þátt í umræðum um endurskoðun námsefnis í Bretlandi (Cooper, 1985). SMP-námsefnið þótti þó ekki búa nemendur nógu vel undir nám í stærðfræðigreiningu við Háskóla Íslands en nám í stærðfræði til B.Sc.-prófs hófst þar árið 1971 (Jón Ragnar Stefánsson, munnleg heimild, 2003). Sænsku námsbækurnar eftir Bergendal, Håstad og Råde (1970) voru teknar upp árið 1971 við Menntaskólann í Reykjavík. Bækur Kristensens og Rindungs tóku við frá 1980 en síðar var stuðst við frumsamið efni (*Skýrsla um Menntaskólann í Reykjavík*). Námsefni Kristensens og Rindungs varð fyrir valinu fyrir stærðfræðideild Menntaskólans við Hamrahlíð, síðan SMP-námsefnið og að lokum bækur Bergendal, Håstad og Råde (*Skýrsla Menntaskólans við Hamrahlíð*). Bækur Kristensens og Rindungs voru teknar upp árið 1969 í Menntaskólanum á Akureyri (Gísli Jónsson, 1981).

Framhaldsdeildum gagnfræðaskólanna fór fjölgandi. Þangað sóttu nemendur með ólík framtíðaráform og ólíkar þarfir en fæstum hentaði námsefni í stærðfræði á erlendum málum. Bráðabirgðapýðingar og frumsamið efni af ýmsu tagi varð til, einkum fyrir upphafsárið á framhaldsskólastigi. Útbreiddust urðu þar þrjú rit: *Stærðfræði fyrir framhaldsdeildir gagnfræðaskóla* (Hörður Lárusson, 1970) og *Rúmfræði handa 1. bekk menntaskóla* eftir Hörð Lárusson (1972) og *Stærðfræði handa menntaskólum* eftir Hildigunni Halldórsdóttur (1972). Framantalin rit voru skrifuð í anda nýju stærðfræðinnar þar sem skilgreind voru mengi, vensl og önnur hugtök mengjafræðinnar en síður hagnýt atriði.

Framhaldsdeildir gagnfræðaskóla tóku um sinn við þenslu á framhaldsskólastiginu. Margar þeirra voru síðar sameinaðar iðnskólum og urðu fjölbrautaskólar. Þarfir nemenda voru ólíkar eftir skólagerðum og námsefni var breytilegt eftir þeim. Þenslunni fylgdu margir ungir kennarar sem lögðu sitt af mörkum við þýðingar og leit að nýju efni. Smám saman dvínaði áhersla á mengjafræðileg efnistöð en efnisvalið breyttist varanlega að nokkru leyti. Tölfræði og líkindareikningur fengu sess í námsefninu (Jón Þorvarðarson, 1982) og til varð námsefni fyrir framhaldsskóla um tölulega greiningu (Yngvi Pétursson, 1979), strjála stærðfræði (Kristín Bjarnadóttir, 2001) og jafnvel línulega bestun auk hefðbundins efnis um algebru, rúmfræði, föll, deildun og heildun.

Barnaskólar

Jónas B. Jónsson, Kristján Sigtryggsson og Kristinn Gíslason kennari áttu nokkra fundi veturinn 1965–1966 og ræddu sýnishorn af námsefni sem Kristján hafði flutt heim frá Bandaríkjunum. Fleiri sóttu fundina og töldu menn tímabært að vinna að breytingum á námsefni barnaskólanna í stærðfræði. Finna þurfti hentug verkefni. Þeim kosti að semja verkefni heima á Íslandi var fljótlega hafnað þar sem menn skorti þekkingu og reynslu til

að takast verkið á hendur. Um tíma var hallast að SMSG-námsefninu. Guðmundur Arnlaugsson námstjóri sótti slíkan fund í apríl 1966 og sagði frá námsefni sem Agnete Bundgaard var að semja og prófa í barnaskóla á Friðriksbergi í Kaupmannahöfn. Kristinn heim sótti Agnete sem var þá að ganga frá lokaútgáfu námsefnis 1. bekkjar, ljúka við aðra prófun á námsefni 2. bekkjar og fyrstu prófun á námsefni 3. bekkjar. Barnaskólar hófust þá við sjö ára aldur í báðum löndum. Efni fyrir 4.–6. bekk var enn ósamið. Afráðið var að þýða efnið og prófa veturinn 1966–1967 í öllum deildum 1. bekkjar Laugarnesskóla og Hvassaleitisskóla. Næsta vetur var ákveðið að bjóða þeim kennurum í Reykjavík sem vildu að kenna námsefnið í 1. bekk (Kristinn Gíslason, 1978). Haustið 1967 sóttu 86 kennarar námskeið til að kynna námsefninu (Fræðslumálaskrifstofan, 1968). Haustið 1969 voru 94,8% sjö ára deilda, 77,7% átta ára deilda, 65,6% níu ára deilda og átta deildir tíu ára barna í Reykjavík með nýju stærðfræðina (Skjöl. Menntamálaráðuneytið – Fræðslumálaskrifstofan. 1989/S-56).

Aðferðir og framsetning í nýja námsefninu voru talsvert nýstárleg. Gamalkunnug viðfangsefni voru sett fram með mengjafræðilegum orðaforða og skýringarmyndum. Dæmi um það er sýnt á *Mynd 5*, tekið úr kennslubók fyrir tíu ára börn (Bundgaard, 1970, bls. 43).

Aður en þú skráir mengin hér á eftir, skaltu reyna fyrir þér í reikniheftinu.

$D_{15} =$ 1, 3, 5, 15

$D_{18} =$ 1, 3, 6, 9, 18

$D_{15} \cap D_{18} =$ _____

Hvaða tölur ganga bæði upp í 15 og 18? Svar: 1, 3

Þú átt að gera 1. mynd að fullgerðri mynd af mengjunum D_{15} og D_{18} .

Mundu að skrifa nafn hvers íbúa við mynd hans.

1. mynd.

Mynd 5 – Verkefni úr kennslubókinni *Stærðfræði – Reikningur*, 4B eftir Agnete Bundgaard (1970, bls. 43). Finna skal hvað tölur ganga bæði upp í 15 og 18. Nemandinn gleymdi þættinum 2 í D_{18} og talan 1 var tvítalin en það kom ekki að sök við lausn dæmisins.

Þegar ljóst varð hve mikil útbreiðsla danska Bundgaard-námsefnisins varð var ýmislegt tekið til bragðs. Vegna aukinnar aðsóknar að námi á framhaldsskólastigi skapaðist hjáleid inn í háskólanám með lögum um Kennaraskóla Íslands nr. 23/1963, þar sem skólinn fékk leyfi til að útskrifa stúdenta. Kennaranemum fjölgaði mjög og unnt var að bjóða upp á valgreinar í 3. bekk haustið 1967, m.a. stærðfræði með mengjafræðilegum efnistöfum. Ennfremur var breytingunum fylgt eftir með námskeiðum fyrir kennara í eina til tvær vikur haust hvert.

Guðmundur Arnlaugsson var þekktur skákskýrandi í útvarpi. Hann gerði sautján þætti um nýju stærðfræðina sem sýndir voru í nýstofnuðu ríkissjónvarpi vikulega frá október 1967 fram í janúar 1968. Efnið var svipað og í bók hans, *Tölum og mengjum* (Guðmundur Arnlaugsson, 1966). Ætlunin mun hafa verið að fræða almenning, en þó sér í lagi foreldra og kennara (Kristín Bjarnadóttir, 2012).

Þýðandi Bundgaard-námsefnisins, Kristinn Gíslason, fór til námsdvalar í Kennaraháskólanum í Kaupmannahöfn haustið 1967 hjá Bent Christiansen þar sem nýja stærðfræðin var höfð í hávegum. Veturinn 1967–1968 stunduðu þrjú stærðfræðikennarar þar nám undir leiðsögn Bents Christiansens (Skjöl. Menntamálaráðuneytið. Fræðslumálaskrifstofan. 1989/S-56). Anna Kristjánsdóttir lauk einnig cand.paed.-prófi þaðan árið 1972. Heim

komin varð hún leiðbeinandi í stærðfræði við kennslufræðideild Fræðsluskrifstofu Reykjavíkur. Árið 1975 tók hún við námstjórn í stærðfræði við Skólarannsóknadeild Menntamálaráðuneytisins (Ólafur Þ. Kristjánsson og Sigrún Harðardóttir, 1985–1988).

Ekki gat farið hjá því að efast yrði um ágæti svo róttækra og viðtækra breytinga sem fylgdu nýju stærðfræðinni í barnafræðslunni. Guðmundur Arnlaugsson benti raunar fyrstur manna á að nýja stærðfræðin geti átt erfitt uppdráttar þegar hann ritaði:

Þetta viðhorf [að kenna fyrir próf] hefur ráðið full miklu og þess vegna er ég hræddur um, að sumir átti sig ef til vill ekki nógu rækilega á því nýja, sem nú er á döfinni, sjái þar aðeins eina aðferðina enn til viðbótar við allar þær gömlu. (Guðmundur Arnlaugsson, 1967, bls. 43)



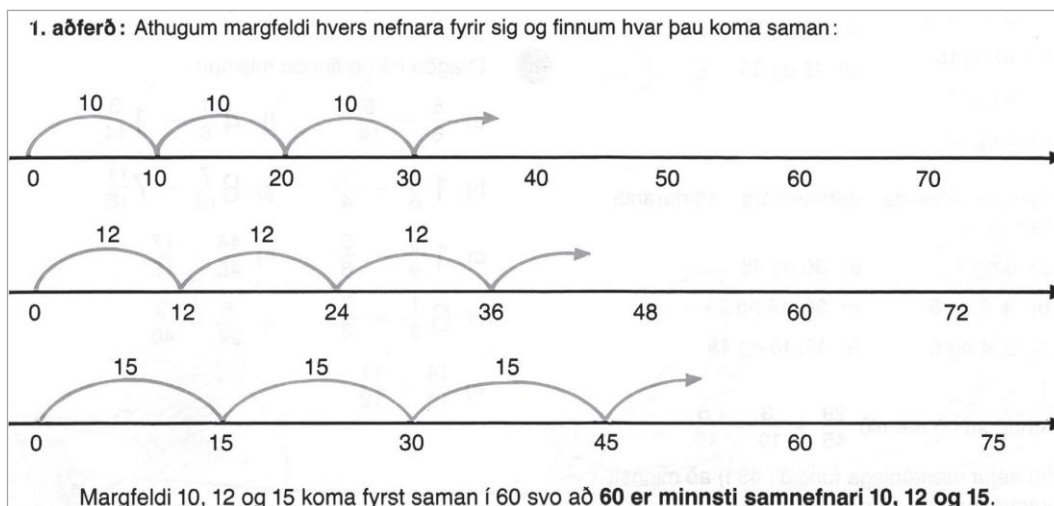
Mynd 6 – Guðmundur Arnlaugsson



Mynd 7 – Anna Kristjánsdóttir

Þrátt fyrir fjölpættar aðgerðir varð nýja stærðfræðin skólum og kennurum erfið. Fleiri kennarar en unnt var að aðstoða með handleiðslu tóku þátt í starfinu og olli það vandkvæðum þegar fram í sótti. Vissulega þótti ýmsum hin nýja sýn á skólastærðfræði áhuga-verð og jafnvel andleg hvatning. Nýstárleg verkefni, til dæmis um tölur, urðu mörgum kennurum og nemendum ögrandi glíma. Stærðfræðin varð erfiðari þegar komið var upp á miðstig. Ef skipta varð um kennara var mikið verk fyrir nýja kennara að kynna sér það sem á undan var komið. Stundum tókst það ekki vel. Meðal annars ollu nýjar reikniáferðir í uppsettri margföldun, miklum vanda (Anna Kristjánsdóttir, 1996). Nánast allir kennarar og foreldrar höfðu lært sömu aðferðirnar eftir sömu kennslubókinni og nýjar aðferðir komu flatt upp á fólk. Ekki var óalgengt að skipt væri yfir í eldra námsefni eftir Elías Bjarnason (1965) sem Kristján Sigtryggsson endurskoðaði. Nemendur máttu ekki fara heim með nýja námsefnið, foreldrar myndu aðeins rugla börnin (Nýja stærðfræðin er eins og nýtt tungumál, 1970). Smám saman magnaðist óánægja kennara, skólayfirvalda og foreldra þótt ekki bæri mikið á því í opinberum heimildum.

Samin voru drög að námskrá þar sem nýstærðfræðileg hugtök voru nefnd (Menntamálaráðuneytið, 1970) en næstu ár var tekið að búa til nýtt námsefni án þess að ný námskrá tæki gildi. Kennarar hófu þessa námsefnisgerð að eigin frumkvæði (Hörður Zópháníason, munnleg heimild, 2. júní 2003) en starfið færðist fljótlega inn í menntamálaráðuneytið. Þar var þróað námsefni í samstarfi margra kennara og gefið út í nokkrum tilrauna-útgáfum. Lokaútgáfan entist fram um aldamótin 2000. Áhrif mengjafræðinnar dvínuðu en eftir varð mun fjölbreyttara námsefni en þekkt hafði fyrir 1966 er endurskoðunin hófst (Kristín Bjarnadóttir, 2006). Aukin áhersla var lögð á myndræna framsetningu enda batnaði aðstoða til myndvinnslu stórlega á næstu árum og áratugum. *Mynd 8* sýnir myndræna framsetningu á leit að minnsta samnefnara þriggja talna (Anna Kristjánsdóttir o.fl., 1988, bls. 39).



Mynd 8 – Skýringardæmi í kennslubók, *Talnaspegli* (Anna Kristjánsdóttir o.fl., 1988, bls. 39).

Gagnfræðaskólar

Guðmundur Arnlaugsson var mjög afkastamikill í námstjórarstarfinu. Haustið 1966 kom út nýstárleg kennslubók eftir hann fyrir nemendur sem stefndu á menntaskólanám með því að taka landspróf miðskóla. Það var þá inntökupróf í menntaskólana og Kennaraskólann. Bókin bar nafnið *Tölur og mengi* og fjallaði um inngang að talnafræði og mengjafræði (Guðmundur Arnlaugsson, 1966). Hún var kennd í nokkrum skólum í tilraunaskyni næstu tvö ár. Haustið 1968 voru gefin út fyrstu drög að námskrá fyrir landsprófsdeildir þótt landspróf hafi verið haldið allt frá vorinu 1946 (Bjarni Vilhjálmsson, 1952). *Tölur og mengi* varð námsefni til landsprófs fram til 1976 (Menntamálaráðuneytið, 1968, 1974).

Bent Christiansen kom til Íslands í febrúar 1969 til að ræða við Jónas B. Jónsson fræðslustjóra um námsefni, sem þörf yrði á haustið 1972 fyrir unglíngastig þar sem Bundgaard-námsefninu sleppti. Einnig ræddu þeir hugsanlega útgáfu námsefnis eftir Bent (Skjöl. Menntamálaráðuneytið. Fræðslumálaskrifstofa, 1989/S-56) en ekki virðist hafa samist um það. Anna Kristjánsdóttir þýddi úr sænsku námsefni NKMM fyrir unglíngastigið, *Rúmfræði* (Bergendal, Hemer og Sander, 1970). Einnig komu út *Algebra fyrir unglíngaskóla* (Anna Kristjánsdóttir og Hörður Lárusson, 1970) og *Stærðfræði handa gagnfræðaskólum* (Hörður Lárusson, 1972) sem Helga Björnsdóttir þýddi og varð valkostur til landsprófs. Ekki er kunnugt um höfunda þessara tveggja rita. Hörður Lárusson samdi síðan fyrir unglínganámsefni sem var kennt all lengi, að minnsta kosti *Stærðfræði handa 9. bekk grunnskóla* (Hörður Lárusson, 1974) á þriðja ári unglíngastigsins.

Árið 1977 var fyrst haldið samræmt lokapróf úr grunnskóla og kennslubók Harðar lögð því til grundvallar auk vafefnis, *Verkefna í verslunarreikningi* (Anna Kristjánsdóttir og Rúnar S. Þorvaldsson, 1976) og *Verkefna í rúmfræði* (Anna Kristjánsdóttir, 1976) (Menntamálaráðuneytið, 1977). Einnig voru gefnir út verkefnapakkar fyrir hópa- og þemavinnu á unglíngastigi. Með útgáfu þessa efnis og vægi þess í samræmdum prófum var dregið úr mengjafræðilegum áherslum í námsefni unglíngastigsins en aukin áhersla lögð á sjálfstæð vinnubrögð nemenda og uppgötvunarnám undir handleiðslu. Minna fór fyrir þessum síðarnefnda þætti en mengjafræðinni í upphafi endurskoðunar á stærðfræðikennslu og námsefni en segja má að hann hafi fest betur rætur og dafnað með tímanum.

Markmið breytinganna

Hvað vakti fyrir mönnum með breytingaferlinu? Í bók Dieudonné og Piagets, *L'enseignement des mathématiques*, sagði að kjarni stærðfræðinnar væri rökfærsla um óhlutbundin efni og ekki mætti slá sértekningu á frest. Nauðsynlegt væri að kynna raunverulega

stærðfræði fyrir unglingum þegar formgerð hugarstarfs þeirra væri að mótast (Furinghetti o.fl., 2008). Tengslahugmynd Piagets var réttlætning Dieudonnés fyrir því að kenna yrði börnum mengjafræði snemma. Þeirri stefnu virðist hafa verið fylgt hjá NKMM. Menn biðu því eftir að nýja stærðfræðin yrði til þess að börnin færu að hugsa rökrétt og gætu kennt foreldrum sínum eins og Agnete Bundgaard og samstarfskona hennar, Karen Blum, héldu fram í blaðaviðtali (Nýja stærðfræðin er eins og nýtt tungumál, 1970).

Aðrir töldu að fleira þyrfti til. Guðmundur Arnlaugsson (1967), sem átti hlut að endurnýjun stærðfræðikennslu á öllum skólastigum, sagði í grein í *Menntamálum* að áherslan á nýjung sem tengdist nýjum hugtökum, svo sem mengjum og meðferð þeirra, gæti hæglega orðið til þess að hún virtist einvörðungu fólgin í breytingum á nöfnum og námsefni. Ef breytingarnar ættu að verða meira en nafnið tómt, þyrfti dýpri viðhorfsbreytingu en upp-dubben námsefnis. Kennslan yrði að halda í við örar breytingar í þjóðfélaginu og þörf væri á andlegum sveigjanleik og áhuga á þeirri framvindu sem yrði að eiga sér stað í lífandi skóla. Gildi stærðfræðikennslunnar færi ekki einvörðungu eftir því hvort nýtt efni eða gamalt væri á boðstólum heldur að hve miklu leyti skilningurinn sé með í förinni. Gildi nýju hugtakanna væri fólgið í að auðvelda skilning á atriðum sem áður hefðu legið í láginni. Kennslan hafi verið of vélræn, beinst um of að leikni, en ekki lögð næg áhersla á yfirsýn og skilning. Aðferðir sem hafi ekki nægan skilning að bakhjarli gleymdust fljótt aftur og væri haldlitlar. Tíminn hlypi einnig all óþyrmilega frá svokölluðum hagnýtum viðfangsefnum. Hlutverk reikningskennslunnar ætti að verulegu leyti að vera að kenna barninu að hugsa.

Breytingarnar höggðu þó sjálfum grundvelli reikningskennslunnar, sem beindist í æ ríkar mæli að strúktúr, formgerð, stærðfræðinnar. Tölurnar væru að vísu mikilvægar enn en þær væru ekki lengur hð eina sem um væri fjallað. Guðmundur tók dæmi um grunnhugtökin mengi og vensl sem gætu sýnt hvernig unnt væri að kynna ungum börnum grundvallarhugmyndir stærðfræði og stuðla að þroska í hugsun. Þó skipti mestu máli sem fyrr að glæða áhuga og gera námið að reynslu sem krefðist þess að nemandinn legði sig heilshugar fram.

Hér komu fram meginþemu í hugmyndafræði nýstærðfræðinnar, að mæta breytingum í þjóðfélaginu og formgerðin, en einnig væntingarnar um aukinn skilning og þroska í hugsun. Stærðfræðin sjálf var í forgrunni og sígildir eiginleikar hennar tengdir rökhugsun, hið stundlega væri hverfullt og yrði fljótt úrelt.

Samanburður við önnur lönd

Endurskoðunarhreyfingin um nýja stærðfræði var fjölþjóðleg. Margt það sem gerðist á Íslandi átti sér hliðstæður í öðrum löndum, til dæmis í Noregi og frá sumum þeirra bárust bein áhrif, svo sem frá Danmörku, eins og rakið verður hér á eftir.

Áhrif frá Danmörku

Forvígismenn nýju stærðfræðinnar á Íslandi urðu fyrir beinum áhrifum frá Danmörku. Áhrif Svends Bundgaards eru augljós; hann benti Guðmundi Arnlaugssyni á námsefni Agnete systur sinnar. Vísindasagnfræðingurinn Jens Høyrup (1979) sagði að nýja stærðfræðin hefði hafið sig til flugs árið 1967–1968 með útgáfu tveggja kennslubókaraða fyrir barnaskóla. Bækur Agnete mætti telja fullkomna aðlögun danska skólakerfisins að ströngustu námsefniskröfum háskólakennara. Bundgaard-efnið hefði verið eindæma þurrt og formlegt en fyrrnefnda kennslubókaröðin of gáskafull. Segja má að Bundgaard-efnið hafi verið kennt sem tilraun á Íslandi fyrir Dani þar sem efnið kom út á íslensku áður en það var tilbúið á dönsku og höfundurinn kom margar ferðir til Íslands til að leiðbeina kennurum.

Menntaskólarnir á Íslandi tóku námsefni eftir Kristensen og Rindung til kennslu. Áhrifa þess gætti þó ekki lengi, hvorki í Menntaskólanum við Hamrahlíð né í Menntaskólanum í Reykjavík, en nokkru lengur í Menntaskólanum á Akureyri. Bent Christiansen hafði einnig bein áhrif á þróunina á Íslandi. Leitað var til hans um ráðgjöf árið 1969 og leiðsagnarkennarar numu við Kennaraháskólann í Kaupmannahöfn undir handleiðslu hans. Bækur Christiansens voru notaðar á kennaranámskeiðum og við Háskóla Íslands (Christiansen og Lichtenberg, 1965; Christiansen, Lichtenberg og Pedersen, 1964).

Danir urðu eins og Íslendingar fyrir beinum áhrifum af kenningum OECD um að menntun stuðlaði að efnahagslegum framförum (Høyrup, 1979) og útbreiðsla nýstærðfræðinnar í Danmörku var drifin áfram eins og á Íslandi af einstaklingum þar sem Bundgard og Christiansen voru í fararbroddi.

Aðrar hliðstæður eru vandfundnari. Menntaskólar í Danmörku voru gegnsýrðir af straumum nýju stærðfræðinnar á meðan íslensku skólarnir glímdu við vaxtarverki og breytilegt námsefni á erlendum tungum. Nýja stærðfræðin í Kennaraháskólanum í Kaupmannahöfn var nánast öfgafull (Mogens Niss, munnleg heimild, október 2004) en að Kennaraskóla Íslands steðjuðu bæði ógnir og tækifæri þegar nemendafjöldinn margfaldaðist í kjölfar laga nr. 23/1963 um stúdentspróf frá skólanum. Endurskoðuninni var ekki stýrt þaðan heldur óformlega frá kennarastofu Menntaskólans í Reykjavík í fyrstu þar sem Guðmundur Arnlaugsson hafði frumkvæði, síðar frá Fræðslu-skrifstofu Reykjavíkur undir stjórn Jónasar B. Jónssonar og enn síðar frá Skólarannsóknadeild Menntamálaráðuneytisins þar sem Hörður Lárusson og síðar Anna Kristjánsdóttir stýrðu starfinu.

Þegar nýja stærðfræðin lét undan síga markaði það upphaf endaloka danskra áhrifa á íslenskt skólakerfi. Kennslubækur í íslenskum menntaskólum höfðu margar verið sóttar í danska menntaskóla. Reglugerð nr. 3/1937 um námsefni Menntaskólans í Reykjavík var sniðin eftir reglugerð með dönskum lögum frá 1903. Lög um menntaskóla nr. 12/1970 og reglugerð nr. 12/1971 voru að vísu að nokkru sniðin eftir dönskum lögum 1961 sem Guðmundur Arnlaugsson (1961) kynnti í *Menntamálum*. En bein notkun danskra kennslubóka fór dvínandi enda fóru kröfur um námsefni á móðurmálinu vaxandi.

Nýstærðfræðin í Noregi

Norðmenn urðu eins og Íslendingar fyrir beinum erlendum áhrifum um nýju stærðfræðina. Bjartsýni gætti um að tækni og tæknimenntun færði Norðmönnum efnahagslegar framfarir eins og OECD lagði áherslu á. Þetta dró athygli norskra yfirvalda að því sem var að gerast í öðrum löndum. Norræna samvinnan innan NKMM hafði einnig áhrif (Gjone, 1983). Áhrifa frá OECD gætti einnig á Íslandi og þau hafa eflaust stuðlað að velvilja Gylfa Þ. Gíslasonar menntamálaráðherra í garð endurskoðunar, ekki aðeins á sviði stærðfræði heldur á öllu skólakerfinu. Áhrifa norræna samstarfsins gætti líka á Íslandi en aðeins óbeint. Íslendingar einskorðuðu sig heldur ekki við norrænt efni heldur sóttu námsefni fyrir framhaldsskólastigið einnig til Bandaríkjanna og Bretlands.

Norðmenn töldu sig ná æskilegri tengingu stærðfræði á menntaskólastiginu við stærðfræði á háskólastigi eins og upphaflega var ætlunin með endurskoðuninni. Síðar sáust menn ekki fyrir og teygðu sig niður á barnaskólastig (Gjone, 1983). Þar urðu líka mestu vandamálin; gagnrýni á að skilningur hafi ekki aukist og leikni hafi hnignað kom fram í Bandaríkjunum, Noregi og á Íslandi.

Innleiðing nýstærðfræðinnar í Noregi á grunnskólastiginu átti sér stað á tveimur sviðum, í vel afmarkaðri tilraunakennslu og gerð nýrrar námskrár. Jafnframt var unnið að stofnun níu ára grunnskóla með lögum árið 1969. Nokkrum tilraunaverkefnum var komið á laggir og tilraunaráð, stofnað árið 1964 og stýrt af Kay Piene, fulltrúa Noregs á Royaumontfundinum, fylgdist með gangi tilraunanna. Piene var helsti talsmaður nýju stærðfræðinnar

meðal Norðmanna en lést fyrir aldur fram árið 1968. Við það dalaði forystan. Tilrauna-kennslan var vel afmörkuð og fór fram í nokkrum skólum. Samanburður var gerður á ár-angri nemenda sem tekið höfðu þátt í tilraunaverkefnum og hinna sem nutu hefðbund- innar kennslu. Samanburðurinn var fremur eigindlegur en megindlegur, en ekki þótti vera marktækur munur á frammistöðu nemenda (Gjone, 1983).

Samin voru námskrárröng sem fjallað var um í nefndum og starfshópum. Meðal annars var deilt um uppsetningu reikniaðgerða en hún olli einmitt mestu umróti í umræðum um Bundgaard-námsefnið á Íslandi. Ferlið var alllangt. Á meðan heyrðust gagnrýnisraddir í Bandaríkjunum (Gjone, 1983). Niðurstaðan varð sú, þegar ný námskrá tók gildi í Noregi árið 1973, að áhrif nýju stærðfræðinnar á námsefnið urðu fremur lítil. Námskráin breyttist þó enn vegna aðlögunar að samræmdum níu ára grunnskóla en stærðfræðin féll í hefð- bundinn farveg (Gjone, 1983). Ferlið var mun vanþróaðra á Íslandi þar sem tilrauna- kennsla fór úr böndunum og námskrár urðu aðeins til í drögum.

Einstaklingar höfðu mikil áhrif í báðum löndum, í Noregi og á Íslandi. Kay Piene var mjög virkur á meðan hans naut við. Erfitt var að finna hlutlausa aðila í Noregi til að meta og gefa álit á efni sem varðaði nýju stærðfræðina (Gjone, 1983). Á Íslandi var það nánast ómögulegt. Enginn virðist hafa haft þekkingu og stöðu til að taka afstöðu til þess sem virtir og óumdeildir forvígismenn nýju stærðfræðinnar tóku sér fyrir hendur.

Endurskoðuninni í báðum löndum var það sameiginlegt að blandast endurskoðun á ung- lingastigi skólakerfanna þar sem þurrkuð var út aðgreining þeirra sem stefndu á lang- skólanám og hinna sem gerðu það ekki. Af því spratt togstreita um hverjir ættu að hafa mest um inntak námsins að segja, háskólakennarar eða kennarar skólanna; og um mark- mið námsins, undir hvers konar framtíð námið skyldi búa nemandann, fræðilegt nám á sviði stærðfræði og tækni eða hversdagslíf venjulegs fólks (Gjone, 1983).

Niðurstöður

Nýja stærðfræðin var öflug alþjóðleg hreyfing, upprunnin bæði í Evrópu og Bandaríkjun- um upp úr 1950. Hún varð til í umhverfi annarrar skyldrar hreyfingar um rétt til náms fyrir alla. Ætlunin var í upphafi að búa menntaskólanemendur betur undir háskólanám í stærð- fræði en áður. Hreyfingin var drifin áfram af einstaklingum í mörgum löndum. Sumir þeirra stýrðu kennaramenntuninni í stærðfræði eins og Kay Piene og Bent Christiansen. Flestir þeir sem mestu réðu um framvindu hreyfingarinnar voru ekki kennarar barna eða ung- linga heldur stærðfræðingar sem kenndu í háskóla eða í menntaskólum þar sem nemend- ur stefndu á háskólanám í stærðfræðilegum greinum, menn eins og Dieudonné, Bund- gaard og Guðmundur Arnlaugsson. Þeir vissu hvers konar kunnáttu þeir æsktu af há- skólanemum en höfðu sumir, t.d. Dieudonné, takmarkaðan áhuga á kennslu. Áherslur sálfræðinga í CIEAEM og kennslufræðinga um vefjunámsefni, uppgötvunarnám undir handleiðslu og notkun áþreifanlegra hluta, viku í fyrstu mynd endurskoðunarinnar. Þær komu fram síðar; einnig hér á landi í námsefni um verslunarreikning og rúmfræði til samræmds grunnskólaprófs og í endurskoðuðu námsefni barnastigs.

Nýja stærðfræðin barst til Íslands með persónulegum kynnum, aðallega frá Danmörku, en einnig fyrir áhrif OECD á íslensk stjórnvöld. Við innleiðingu hennar sameinuðust kraftar áhugasamra stærðfræðinga og stjórnvalda (Kristín Bjarnadóttir, 2007) en kennarar og samtök þeirra létu málið ekki til sín taka. Íslenskt þjóðfélag var fremur einsleitt og að- stæður til náms og rannsókna í stærðfræðimenntun takmarkaðar. Fáir höfðu lokið námi í stærðfræði sem kennslugrein en ýmsir þeirra hrifust af nýstærðfræðinni og endurbótunum sem hún boðaði.

Bandarískt, enskt, danskt og sænskt námsefni var prófað í íslenskum framhaldsskólum. Síðan færðist hugmyndin niður eftir skólakerfinu bæði á Íslandi og erlendis. Danska Bundgaard-námsefnið var skýrasta dæmið um tilraun til að innleiða háskólamátað náms-efni fyrir börn. Höfundur þess, Agnete Bundgaard, var sjálf barnakennari en virðist hafa orðið fyrir sterkum áhrifum frá bróður sínum, háskólaprófessornum Svend Bundgaard. Íslendingar tóku námsefnið upp í hinni alþjóðlegu hrifningaröldu í von um bættan efnahag og aukinn þroska í hugsun og skilning á stærðfræðinni. Fljótlega heyrðust þó raddir um að áhersla væri of mikil á að læra ný hugtök og aðferðir í viðbót við hinar gömlu en kennslan breyttist ekki eins og ætlunin hefði verið.

Lífskjör hafa batnað til muna á Íslandi frá sjöunda áratug tuttugustu aldar. Ekki verða færð rök fyrir því að það sé nýju stærðfræðinni að þakka, enda voru engar rannsóknir gerðar á árangri þess starfs. Vafalaust má finna sögur um misheppnaða kennslu sem náði ekki til nemenda og kennara sem lentu í vandræðum með nýtt námsefni en þær eru líka til frá öðrum tímum. Nýja stærðfræðin var liður í umfangsmiklu umbótastarfi, ekki síst fyrir áeggjan OECD. Líklegt er að fylgifiskur nýju stærðfræðinnar, öflugt námskeiðahald fyrir stærðfræðikennara og leiðsögn þeim til handa, hafi styrkt kennara í starfi og skapað grundvöll undir frekara samstarf þeirra á milli þótt hugmyndirnar hafi verið framandi og framkvæmd þeirra erfið. Hópur kennara átti þátt í þróun nýs námsefnis sem veitti þeim tækifæri til frumkvæðis og sköpunar. Breyting, endurnýjun og þróun eru kveikjur kennara í starfi eins og marka má af umsögn reynds skólastjóra:

Það þarf alltaf að vera stöðug endurnýjun. Það gefur kennurum nýjan kraft að fást við eitthvað nýtt (Hörður Zóphaníasson, munnleg heimild, 2. júní 2003).

Nýja stærðfræðin hefur löngum verið tekin sem dæmi um misheppnað þróunarstarf. Hún hafði engu að síður mikil og mikilvæg áhrif í þá veru að vekja kennara til umhugsunar um að skólasterðfræði á sér margar hliðar og hana má setja fram á fjölbreytilega vegu. Nýja stærðfræðin vakti frumkvæði kennara og að lokum varð til nýtt námsefni sem var samruni hins nýja og hins gamla og bar kosti beggja.

Heimildir

Allendoerfer, C. B., og Oakley, C. O. (1963). *Principles of Mathematics* (2. útgáfa). New York: McGraw-Hill Book Company.

Anna Kristjánsdóttir. (1976). *Verkefni í rúmfræði handa 9. bekk grunnskóla*. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka.

Anna Kristjánsdóttir. (1996). *Stærðfræðinám. Meginstefnur og viðfangsefni*. Reykjavík: Kennaraháskóli Íslands.

Anna Kristjánsdóttir, Ásgerður Magnúsdóttir, Björg Birgisdóttir, Ingólfur Ármannsson og Kristín Bjarnadóttir. (1988). *Stærðfræði handa grunnskólum 7: Talnaspeggill*. Reykjavík: Námsgagnastofnun.

Anna Kristjánsdóttir og Hörður Lárusson (þýðendur). (1970) *Algebra unglingskóla*. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka og Menntamálaráðuneytið, skólarannsóknadeild.

Anna Kristjánsdóttir og Rúnar Þorvaldsson. (1976). *Verkefni í verslunarreikningi handa 9. bekk grunnskóla*. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka.

Bergendal, G., Hemer, O. og Sander, N. (1970). *Rúmfræði*. Anna Kristjánsdóttir þýddi. Guðmundur Arnlaugsson ritaði formála. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka.

Bjarni Vilhjálmsson. (1952). *Landspróf miðskóla 1946–1951*. Reykjavík: Fræðslumála-stjórnin.

Briscoe Center for American History. (e.d.). *A Guide to the School Mathematics Study Group Records, 1958–1977*. Sótt 18. apríl 2012 af <https://www.lib.utexas.edu/taro/utcah/00284/00284-P.html>

Bruner, J. S. (1960). *The Process of Education*. New York: Vintage Books.

Bundgaard, A. (1970). *Stærðfræði: Reikningur 4a*. Kristinn Gíslason þýddi og staðfærði. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka.

Christiansen, B., Lichtenberg, J. og Pedersen, J. (1964). *Almene begreber fra logik, mængdelære og algebra*. København: Munksgaard.

Christiansen, B. og Lichtenberg, J. (1965). *Matematik 65*. København: Munksgaard.

CIEAEM. (e.d.). Sótt 17. apríl 2012 af <http://www.mathunion.org/icmi/icmi/about-icmi/affiliate-organizations/math-education-societies/cieaem/>

Cooper, B. (1985). *Renegotiating Secondary School Mathematics: A Study of Curriculum Change and Stability*. London: The Falmer Press.

Efnahagsstofnunin. (1965). *Nokkur efnisatriði erinda og umræðna frá fundum um menntaáætlanagerð 2. og 3. júní, 1965*. Reykjavík: Höfundur.

Elías Bjarnason. (1965). *Reikningsbók Elfasar Bjarnasonar*. Kristján Sigtryggsson endursamdi. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka.

Fræðslumálaskrifstofan (1968). Frá Fræðslumálaskrifstofunni. *Menntamál*, 41(1), 94–97.

Furinghetti, F., Menghini, M., Arzarello, F. og Giacardi, L. (2008). ICMI renaissance: The emergence of new issues in mathematics education. Í Menghini, M., Furinghetti, F., Giacardi, L. og Arzarello, F. (ritstjórar), *The first century of the International Commission on Mathematics Instruction (1908–2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education* (bls. 131–147). Róm: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Gestur O. Gestsson. (1961a). Reikningur. *Menntamál* 34(2), 113–125.

Gestur O. Gestsson. (1961b). Reikningskennsla. *Menntamál* 34(3), 265–269.

Gísli Jónsson (ritstjóri). (1981). *Saga Menntaskólans á Akureyri 1880–1980*, 1–3. Akureyri: Prentverk Odds Björnssonar h.f.

Gjone, G. (1983). *“Moderne matematikk” i skolen: Internasjonale reformbestrebelse og nasjonalt læreplanarbeid*, I–VIII. Oslo: Universitets Forlaget.

Guðmundur Arnlaugsson. (1961). Danski menntaskólinn í deiglu. *Menntamál* 34(1), 71–75.

Guðmundur Arnlaugsson. (1966). *Tölur og mengi*. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka.

Guðmundur Arnlaugsson. (1967). Ný viðhorf í reikningskennslu. *Menntamál* 40(1), 40–51.

Guðmundur Jónsson og Magnús S. Magnússon (ritstjórar). (1997). *Hagskinna: Sögulegar hagtölur um Ísland*. Reykjavík: Hagstofa Íslands.

Háskóli Íslands. Skjalasafn. Prófbækur Heimspekideildar.

Hildigunnur Halldórsdóttir. (1972). *Stærðfræði handa 1. bekk menntaskóla*. Reykjavík: Menntaskólinn við Hamrahlíð.

Hörður Lárusson. (1970). *Stærðfræði fyrir framhaldsdeildir gagnfræðaskóla*. Reykjavík: Menntamálaráðuneytið, skólarannsóknadeild.

Hörður Lárusson. (1972). *Rúmfræði handa 1. bekk menntaskóla*. Reykjavík: Höfundur.

Hörður Lárusson (ritstjóri). (1972). *Stærðfræði handa gagnfræðaskólum*. Helga Björnsdóttir þýddi. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka.

Hörður Lárusson. (1974). *Stærðfræði handa 9. bekk grunnskóla*. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka.

Høyrup, J. (1979). Historien om den nye matematik i Danmark – en skitse. Í P. Bollerslev (ritstjóri), *Den ny Matematik i Danmark* (bls. 49–65). Kaupmannahöfn: Gyldendal.

Jón Þorvarðarson. (1982). *Tölfræði*. Reykjavík: Höfundur.

Jónas B. Jónsson. (1962). *Ég reikna*. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka.

Jónas B. Jónsson. (1963). *Ég reikna og líta*. Ríkisútgáfa námsbóka.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. Í D. Grouws (ritstjóri), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (bls. 3–38). New York: Macmillan.

Kristinn Gíslason. (1978). *Nýja stærðfræðin*. Óbirt skýrsla til fræðslustjórans í Reykjavík.

Kristín Bjarnadóttir. (2001). *Strjál stærðfræði*. Reykjavík: Iðnú.

Kristín Bjarnadóttir. (2006). *Mathematical education in Iceland in historical context – Socio-economic demands and influences*. Reykjavík: Háskólaútgáfan. Sótt af http://rudar.ruc.dk/bitstream/1800/2914/1/Chapter0_IMFUFA.pdf

Kristín Bjarnadóttir. (2007). Nokkur tímamót í sögu íslenskrar stærðfræðimenntunar. *Tímarit um menntarannsóknir*, 4, 7–22.

Kristín Bjarnadóttir. (2009). Gróska og stöðnun í stærðfræðimenntun 1880–1970. *Tímarit um menntarannsóknir*, 6, 51–65.

Kristín Bjarnadóttir. (2012). Nýja stærðfræðin í barnaskólum. Miðlun upplýsinga til kennara, foreldra og almennings. *Tímarit um menntarannsóknir*, 9.

Kristján Sigtryggsson. (1964). Tilraunir með reikningskennslu. *Menntamál* 37(3), 146–159.

Lög um gagnfræðanáám nr. 48/1946.

Lög um grunnskóla nr. 63/1974. *Lög um Kennaraháskóla Íslands* nr. 38/1971.

Lög um Kennaraskóla Íslands nr. 23/1963.

Lög um menntaskóla nr. 12/1970.

Lög um menntun kennara nr. 16/1947.

Lög um skólakerfi og fræðsluskyldu nr. 22/1946.

Lög um skólakerfi nr. 55/1974.

Menntamálaráðuneytið. (1960). *Námskrá fyrir nemendur á fræðsluskyldualdri*. Reykjavík: Höfundur.

Menntamálaráðuneytið. (1970). *Drög að námskrá í stærðfræði fyrir barnafræðslustig. Nefndarálit*. Reykjavík: Höfundur.

Menntamálaráðuneytið. (1968). *Drög að námskrá í landsprófsdeildum miðskóla*. Reykjavík: Höfundur.

Menntamálaráðuneytið. (1974). *Stærðfræði. Samræmd próf vorið 1975*. Reykjavík: Höfundur.

Menntamálaráðuneytið. (1977). *Um stærðfræðinám í grunnskóla skólaárið 1977–1978*. Reykjavík: Höfundur.

Menntamálaráðuneytið. (1979). *Endurskoðun námsefnis á grunnskólastigi. Skýrsla um starfsemi skólarannsóknadeildar menntamálaráðuneytisins 1967–1978*. Reykjavík: Höfundur.

Menntamálaráðuneyti – Fræðslumálaskrifstofa 1989/S-56. Skólarannsóknir. Bréf Jónasar B. Jónssonar, fræðslustjóra í Reykjavík, dagsett 31. október 1969, til Harðar Lárussonar, deildarstjóra skólarannsóknadeildar menntamálaráðuneytisins.

National Defense Education Act. (e.d.). Sótt 17. apríl, 2012 af <https://federaleducationpolicy.wordpress.com/-2011/06/03/national-defense-education-act-of-1958-2/>

Nordisk Råd. (1967). *Nordisk skolmatematik*. (Nordisk udredningsserie, 9). Stockholm: Höfundur.

Nýja stærðfræðin er eins og nýtt tungumál. (1970, 13. september). *Morgunblaðið*, bls. 23–24.

OEEC. (1961). *New Thinking in School Mathematics* (2. útgáfa). Paris: Höfundur.

Osborne, A. R. og Crosswhite, F. J. (1970). Forces and Issues Related to Curriculum and Instruction, 7–12. Í P. S. Jones (ritstjóri), *A History of Mathematics Education in the United States and Canada: Thirty-second Yearbook* (bls. 155–297). Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics.

Ólafur Þ. Kristjánsson og Sigrún Harðardóttir. (1985–1988). *Kennaratal á Íslandi III–V*. Reykjavík: Prentsmiðjan Oddi h.f.

Reglugerð fyrir Menntaskólann í Reykjavík nr. 3/1937.

Reglugerð um menntaskóla nr. 12/1971.

Skjalasafn Alþingis. Dagbók 45–46, nr. 615. Bréf dagsett 4. mars 1946, undirritað af Ólafi Lárussyni, rektor Háskóla Íslands, með umsögn háskólaráðs til menntamálanefndar neðri deildar Alþingis um II. kafla frumvarps um menntun kennara er lá fyrir Alþingi árið 1946.

Skýrsla Menntaskólans við Hamrahlíð 2.–5. ár, 1966–1967, 1967–1968, 1968–1969, 1969–1970, 1970–1971. Reykjavík: Menntaskólinn við Hamrahlíð.

Skýrsla um Menntaskólann í Reykjavík 1963–1964 ... 1983–1984. Reykjavík: Menntaskólinn í Reykjavík.

Sveinbjörn Björnsson. (1966). Samanburður á námi í stærðfræði, eðlisfræði og efnafræði í dönskum, norskum og íslenskum unglinga- og gagnfræðaskólum. *Menntamál*, 39(2), 100–121.

University of St. Andrews. (e.d.). *Dieudonné*. Sótt af <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/-Biographies/Dieudonne.html>

Yngvi Pétursson. (1979). *Töluleg greining*. Reykjavík: Menntaskólinn í Reykjavík.



Kristín Bjarnadóttir. (2012). „Nýja stærðfræðin“: Uppruni og afdrif. *Ráðstefnurit Netlu – Menntakvika 2012*. Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Sótt af <http://netla.hi.is/menntakvika2012/009.pdf>