



Ritrýnd grein birt 31. desember 2010

Jónína Vala Kristinsdóttir

Samfélag kennara sem hvetur til ígrundunar um nám barna

Rannsókn á þróun stærðfræðikennslu á miðstigi grunnskóla

Í greininni er fjallað um rannsókn á þróunarstarfi bekkjarkennara um stærðfræðinám barna. Þróunarstarfið spratt af áhuga kennaranna á að skilja hvernig stærðfræðinám nemenda þeirra þróast og hófst í framhaldi af námskeiði sem tveir kennaranna sóttu. Markmið hennar var að greina hvernig ígrundun á eigin starfi, í samfélagi við aðra, getur leitt til þróunar kennsluhátta þar sem öllum nemendum eru skapaðar forsendur til merkingarbærs stærðfræðináms. Meginniðurstöður eru þær að það markvissa samstarf sem þróaðist í kennarahópnum leiddi til breyttra kennsluhátta og breyttra viðhorfa kennaranna til þess hvernig börn læra stærðfræði. Greining þeirra á styrkleikum nemenda auðveldaði þeim að koma til móts við þarfir ólíkra barna og velja viðfangsefni sem allir nemendur gátu unnið saman að, hver á sínum forsendum.

Höfundur er lektor í stærðfræðimenntum við Kennaradeild á Menntavísindasviði Háskóla Íslands.

Community of inquiry that promotes reflections on children's learning: A case study of development in mathematics teaching in elementary school
The focus of this case study was on developmental work initiated by classroom teachers in a primary school. The developmental process was not intentional to begin with but progressed as the teachers' interest in their students' development of mathematical understanding grew. The teachers' co-operation started when two of them came back from a course on children's mathematical thinking and were inspired to use their knowledge from the course in their teaching. Through constant discussions and reflections on their students' solution strategies and reflection on their teaching, the teachers built a community of inquiry where they developed their understanding of their students' learning and managed to create classroom cultures that promoted learning.

Inngangur

Sumarið 1995 var haldið námskeið á vegum Kennaraháskóla Íslands og Flatar, samtaka stærðfræðikennara, þar sem kynntar voru rannsóknir á skilningi barna á tölum og reikni-aðgerðum (Carpenter, Fennema og Franke, 1995). Námskeiðið sóttu fjölmargir grunn-

skólakennarar sem flestir kenndu á yngsta stigi grunnskólans. Eftir að námskeiðinu lauk hittust margir af þátttakendum þess og ræddu um reynslu sína af að nýta sér þá þekkingu sem þeir öðluðust á námskeiðinu. Í þeim hópi vorutvær af þeim kennslukonum sem hér verður fjallað um. Þær sóttust báðar eftir að kenna byrjendum í skóla strax um haustið og nýta sér þá þekkingu og reynslu sem þær höfðu öðlast á námskeiðinu. Fljótlega kom í ljós að áhugi þeirra, á að skilja hugsun nemenda sinna um stærðfræði og að greina hvernig skilningur þeirra og færni sem þróaðist við stærðfræðinámið, hafði áhrif á samkennara þeirra. Á samstarfsfundum fyrstu bekkjar kennara í skólanum var mikið rætt um hvernig börnin tókust á við þær stærðfræðiþrautir sem lagðar voru fyrir þau og hvað kennararnir gætu lært af því til að skipuleggja uppbyggilegt námsumhverfi fyrir börnin. Kennararnir fengu tækifæri til að vinna saman í tíu ár og á þeim tíma þróaðist með þeim samfélag þar sem umræða um stærðfræðinámið nemenda þeirra var í forgrunni en jafnframt þróaðist samstarf þeirra og gagnkvæm virðing og stuðningur við það flókna ferli að kenna stærðfræði.

Á þessum tíu árum unnu kennararnir að því að kynna hugmyndir sínar fyrir öðrum kennurum skólans og sóttu m.a. um styrki úr þróunarsjóðum kennara til að geta haldið námskeið og unnið úr reynslu sinni. Þar sem ég var faglegur ráðgjafi þeirra við þróunarstarfið safnaði ég gögnum úr vettvangsathugunum, viðtölum og lausnum nemenda á verkefnum. Þegar þessu nána samstarfi lauk ákvað ég að rannsaka hvernig kennurum vegnaði og nýta mér gögn frá fyrri árum við greiningu á þeim nýju gögnum sem ég safnaði. Kennararnir, sem ég hef valið að kalla Björk, Írisi, Söru og Tinnu, kenndu áfram við sama skóla. Sara og Tinna höfðu sinnt öðrum störfum í eitt ár og voru nú komnar aftur til baka og kenndu báðar 6. bekk. Björk og Íris höfðu haldið áfram samstarfi sínu og kenndu 7. bekk.

Þar sem ekki er gert ráð fyrir því í starfsskyldum kennara að þeir hafi svigrúm til að stunda rannsóknir á eigin starfi og skrifa um það er mikilvægt að þeir sem vinna að rannsóknum á skólastarfi hjálpi kennurum við að koma reynslu sinni og þekkingu á framfæri við aðra. Eftir fimmtán ára samstarf við kennarana gefst nú loks tækifæri til að skrifa um þróunarstarf þeirra með það að markmiði að frásögnin geti orðið öðrum kennurum hvatning til dáða.

Stærðfræðinámið og kennsla við aldamót

Undanfarna áratugi hefur orðið mikil breyting á samfélagi okkar og starfið í skólum landsins hefur breyst í takt við það. Nýjar námskrár og nýtt námsefni sem fylgt hefur í kjölfar þeirra gera kröfur til kennara um að þróa kennsluhætti sína og breyta áherslum í kennslu. Í stærðfræðihluta aðalnámskrár grunnskóla sem kom út árið 1999 (Menntamálaráðuneytið, 1999) var markmiðum skipt í inntaksmarkmið og aðferðamarkmið. Inntaksmarkmiðin voru flestum kennurum kunnugleg en aðferðamarkmiðin, þar sem áhersla er lögð á þátt tungumálsins við stærðfræðinámið, lausnir verkefna og þrauta, röksamhengi og röksemdafærslur og tengsl stærðfræði við daglegt líf og önnur svið, höfðu ekki verið sett fram með jafn skýrum hætti í fyrri námskrám. Í kjölfar nýrrar námskrár kom nýtt námsefni sem byggði á henni (Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir, 2010). Mörgum kennurum finnst erfitt að uppfylla þær kröfur sem eru gerðar í námskránni og nýju námsefni um sveigjanlega kennsluhætti í stærðfræði. Þeim finnst þeir ekki hafa nægilega þekkingu og skilning á stærðfræði og aðferðum hennar til að geta kennt hana. Fjölgun nemenda sem ekki hafa íslensku sem móðurmál og áhersla á skóla án aðgreiningar veldur líka óöryggi margra kennara (Hafðís Guðjónsdóttir og Jónína Vala Kristinsdóttir, 2006; Hafðís Guðjónsdóttir, Jónína Vala Kristinsdóttir og Edda Óskarsdóttir 2010).

Það er ekki einungis á Íslandi sem breytingar á kennsluháttum eiga erfitt uppdráttar. Samhliða því sem gerðar hafa verið alþjóðlegar kannanir um árangur nemenda í stærðfræði hafa menntunarfæðingar rannsakað stærðfræðikennslu. Þegar þriðja alþjóðalega

könnunin um náttúrufræði og stærðfræði, TIMSS, var framkvæmd 1995 voru jafnframt skoðaðar sérstaklega kennslustundir í Bandaríkjunum, Japan og Þýskalandi. Í ljós kom að mikill munur var á kennslu í þessum ríkjum. Í Japan var áherslan á lausnir þrauta. Kennararnir leggja áherslu á að nemendur þrói sínar eigin lausnaleyðir og skilning á viðfangsefnum. Í Þýskalandi var megináherslan á stærðfræðina. Kennararnir hafa gott vald á henni og kynna hana fyrir nemendum eins og þeir telja henta best. Í Bandaríkjunum var áhersla lögð á að nemendur lærðu skilgreiningar og aðferðir við reikning en lítil áhersla á skilning á stærðfræði (Stiegler og Hiebert, 1999). Niðurstöður þessarar rannsóknar hafa haft mikil áhrif á stærðfræðikennslu víða um hinn vestræna heim og hefur áratugalöng hefð japanskra kennara í að skipuleggja saman og rannsaka kennslustundir hver hjá öðrum vakið athygli sem leið fyrir kennara til að þróa starf sitt með það að markmiði að bæta kennslu sína (Lewis, Perry og Murata 2006).

Rannsóknir á síðari hluta 20. aldar gáfu vísbendingar um að kennsla margra kennara á Vesturlöndum einkenndist af því viðhorfi til stærðfræði að til að ná tökum á henni þurfi nemendur að öðlast færni í að framkvæma reikniaðgerðir eftir gefnum forskriftum líkt og fram kom í niðurstöðum þeirra Stieglers og Hieberts. Lítil áhersla virðist vera á hugtaka-skilning og sveigjanleg vinnubrögð við stærðfræðinám (Goldsmith og Schifter, 1997; Cooney og Shealy, 1997).

Í rannsókn á viðhorfum íslenskra kennara á yngsta stigi grunnskóla til stærðfræði, stærðfræðináms og stærðfræðikennslu (Margrét Vala Gylfadóttir, 2004) kom fram að flestir þeirra telja mikilvægt að nemendur fái að þróa eigin lausnaleyðir við stærðfræðinám og að það sé hlutverk kennarans að styðja við nám barnanna. Þegar spurt var nánar út í einstaka þætti kom þó fram að margir kennaranna töldu að stærðfræði byggðist á færni sem er stigskipt og að færniatriði ætti að kenna í réttri röð. Nemendur þurfi mikla endurtekningu og þjálfun til að verða góðir í stærðfræði og að mikilvægt sé að kennarinn útskýri aðferðir á skýran og skilmerkilegan hátt. Þessar niðurstöður gefa vísbeningar um það að jafnvel þó kennararnir hafi þau viðhorf að börn þurfi að fá að byggja á fyrri þekkingu og reynslu við nám þá mótast hugmyndir þeirra um stærðfræðinám meira af rótgrónum hugmyndum um stærðfræðinám.

Rannsóknir á þróun kennara í starfi sem hafa lagt sig eftir að kynna sér rannsóknir á stærðfræðinámi barna gefa vísbendingar um að kennarar breyti kennsluháttum sínum þegar þeir fara að greina það ferli sem á sér stað í stærðfræðikennslustundum. Með því að mynda samfélag við aðra kennara sem vinna að sama markmiði styrkjast þeir í vinnubrögðum sínum og viðhorfum til stærðfræðináms (Fennema, Carpenter, Franke, Levi, Jacobs og Empson, 1996; Jacobs, Franke, Carpenter, Levi og Battey, 2007; Nelson, 1997). Í umfjöllun sinni um nám stærðfræðikennara við lok 20. aldar segir Dawson (1999) að á Vesturlöndum hafi áhersla færst frá því að kennarinn kenni hvernig á að leysa verkefni í þá átt að kennarinn leggi viðfangsefni fyrir nemendur sem hjálpa þeim til að skilja stærðfræðina sem felst í verkefninu. Kennarinn þarf að skilja hugsun nemandans til að geta hjálpað honum að efla skilning sinn og kennarinn þarf að vera þátttakandi í vinnunni með nemandanum.

Á 9. áratug síðustu aldar voru gerðar umfangsmiklar rannsóknir á hugsun barna og skilningi þeirra á tölum og reikniaðgerðum við Wisconsin háskóla í Bandaríkjunum. Í framhaldi af þeim var unnið markvisst að því að kynna kennurum niðurstöður rannsókna. Haldin voru námskeið þar sem bæði hugmyndafræðin sem byggt var á við rannsóknirnar og niðurstöður þeirra voru kynntar kennurum. Fylgst var með hluta þeirra kennara sem þátt tóku í námskeiðunum og kannað hvernig þeim gekk að nýta sér þekkingu á lausnaleyðum barnanna og hvernig skilningur þeirra við reikningsnámið þróaðist (Carpenter o.fl., 1995). Þær Björk og Íris kynntust þessum rannsóknum á námskeiðinu sem þær sóttu árið 1995.

Rannsóknin á þróun stærðfræðikennslu kennara gengur undir heitinu *Cognitively Guided Instruction* (CGI) og hefur það verið þýtt á íslensku sem *Stærðfræðikennsla byggð á skilningi barna* (SKSB). Eins og heitið ber með sér er hugmyndafræðin að baki rannsóknanna sú að kennarar þurfi að greina hver skilningur nemenda þeirra er og nýta sér þá þekkingu til að byggja á við kennslu sína (Jónína Vala Kristinsdóttir, 2006).

Í ljós kom að þeir kennarar sem lögðu sig fram við að nýta sér þá þekkingu sem þeir höfðu aflað sér um hugsun barna breyttu kennslu sinni þegar þeir sáu hvernig þessi þekking nýttist þeim til að skilja hugsun nemenda sinna og þróun skilnings þeirra á tölum og reikniaðgerðum. En breytingar gerast skref fyrir skref og jafnvel mánaðar langt námskeið var bara byrjunin á ferli þar sem stöðugt var þörf á stuðningi næstu árin. Eitt af því sem virtist vera kennurunum mikilvægt var að geta tekið þátt í umræðum um kennslu sína við aðra kennara sem einnig voru að glíma við hvernig þeir gætu notað þekkingu sína í kennslunni (Fennema o.fl., 1996).

Við lok 20. aldar tóku nokkrir fræðimenn sem gert höfðu rannsóknir á stærðfræðinámi barna, í Bandaríkjunum og Suður-Afríku, saman viðmið um stærðfræðikennslu á grundvelli niðurstaðna sinna (Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Wearne, Murray, Oliver og Human, 1997). Þeir settu fram viðmið um stærðfræðikennslu sem skilar árangri. Þeir telja mikilvægt að þau viðfangsefni sem lögð eru fyrir nemendur séu við hæfi þeirra og þess eðlis að nemandinn geti notað þá þekkingu sem hann hefur til að þróa aðferð til að leysa þau. Nemendur eiga að fá tækifæri til að hugsa um stærðfræði sem mikilvægt er að hafa vald á og að læra eitthvað sem hefur gildi fyrir þá. Hjálpargögn svo sem hlutir, frásagnir og skráning geta auðveldað skilning ef nemendur fá að nota þau til að leysa viðfangsefni. Hlutverk kennarans er að taka þátt í vinnu nemenda og skiptast á skoðunum við þá um verkefni. Hann ber ábyrgð á að skapa menningu í skólastofunni sem hvetur til náms. Þar eru hugmyndir allra nemenda metnar að verðleikum og nemendur velja þær aðferðir sem þeir nota og deila þeim með öðrum. Mistök eru notuð til að læra af þeim á uppbyggjandi hátt, allir nemendur eiga að fá að leggja eitthvað til málanna og þeir eiga rétt á að skilja það sem þeir eru að fást við í stærðfræði.

Bredcamp (2004) leggur líka áherslu á að tryggja þurfi jafnrétti til stærðfræðináms. Árangur í stærðfræðinámi seinna meir byggir á þróun skilnings á yngri aldurstigum. Taka þarf tillit til mismunandi einstaklinga og félagslegs bakgrunns við skipulagningu stærðfræðináms. Þekking á því sem börn bera með sér þarf að vera leiðarljós við skipulagningu stærðfræðikennslu.

Á Norðurlöndum hafa rannsóknir á stærðfræðinámi og kennslu gefið vísbendingar um svipaða þróun. Í skýrslu til danska menntamálaráðuneytisins sem gefin var út árið 2002 skilgreina skýrsluhöfundar æskilega hæfni stærðfræðikennara (*Kompetancer og matematiklæring, 2002*; Kristín Bjarnadóttir, 2003). Þar er lögð áhersla á að kennarar geti greint hvernig nám hvers nemanda fer fram, hvaða hæfni hann hefur tileinkað sér og hverjar framfarir hans eru. Þeir þurfa að geta unnið með öðrum samkennurum, foreldrum og öðrum sem koma að stærðfræðikennslu. Kennarar þurfa stöðugt að auka færni sína bæði í stærðfræði og kennslu greinarinnar, geta endurmetið kennslu sína og rætt hana við starfsfélag. Þeir þurfa að hafa hæfni til stærðfræðilegrar hugsunar, þrautalausna, líkanagerðar, röksemdafærslu, fjölbreytni í framsetningu, meðferðar tákna máls, samskipta og hjálpartækja. Kennarar þurfa að hafa góðan skilning á hvers konar spurningar og svör eigi við í stærðfræðikennslu. Mikilvægt er að geta laðað fram slíka hæfni hjá nemendum sínum og hafa tilfinningu fyrir hvers konar svára er að vænta.

Nýlegar íslenskar rannsóknir um stærðfræðikennslu gefa jákvæðar vísbendingar um faglega þróun við stærðfræðikennslu. Rannsókn Guðrúnar Angantýsdóttur (2010) bendir til að markvisst samstarf kennara um aðferðir við stærðfræðikennslu geti leitt til faglegrar

þróunar sem hefur jákvæð áhrif á kennslu þeirra. Kennararnir unnu að starfendarannsókn um stærðfræðikennslu undir faglegri leiðsögn eins af höfundum nýs námsefnis í stærðfræði. Í rannsókn Katrínar Friðriksdóttur (2010) og Jónínu Völu Kristinsdóttur (2006) kemur fram að viðhorf kennara og reynsla þeirra af eigin stærðfræðinámi og -kennslu hefur áhrif á kennslu þeirra. Með því að afla sér nýrrar þekkingar á námi og kennslu og ígrunda markvisst eigin kennslu og það nám sem fer fram innan skólastofunnar í ljósi þekkingar sinnar styrkir kennarinn sig í starfi.

Rannsóknarferlið

Markmiðið með rannsókninni var að lýsa þróunarstarfi kennara um stærðfræðikennslu í einum grunnskóla og greina þá þætti sem áhrif hafa haft á hvernig hún hefur þróast. Leitast var við að svara spurningum um hvernig þekking kennaranna á námi barna og kennsluháttum í stærðfræði endurspeglast í kennslu þeirra og hvernig þeir skynja að fagleg umræða hafi haft áhrif á kennslu þeirra og faglega þróun.

Viðtöl voru tekin við alla kennarana, fylgst með kennslustundum þeirra í stærðfræði og gögnum safnað frá nemendum. Viðtöl við kennarana og vettvangsathuganir frá fyrri árum ásamt úrlausnum nemenda og viðtali við skólastjóra voru nýtt við túlkun niðurstaðna.

Áður en lokaáfangi rannsóknarinnar hófst voru vettvangsnótur frá fyrri árum greindar og nýttar sem stuðningur við viðtölin. Viðmælendur voru hvattir til að segja frá eigin viðhorfum og reynslu og skýra frásögn sína nánar meðal annars með því að vísa til þess sem fram kom í fyrri vettvangsrannsóknum og viðtölum.

Tilgangur viðtalanna var að afla upplýsinga um viðhorf kennaranna til kennslu sinnar og samstarfs við samkennarana. Þeir voru hvattir til að segja frá kennslu sinni og námi barnanna, samstarfinu og því hvernig það nýttist þeim við að þróa stærðfræðikennsluna og greiningu á námi einstakra nemenda. Til að tryggja að rödd kennaranna fengi að heyrast var þekking kennaranna sem birtist í frásögninni notuð sem leiðarljós við túlkun gagnanna. Frásagnir þeirra og skýringar á viðhorfum þeirra og hugmyndum um hvernig samstarfið þróaðist voru því greindar, túlkaðar og flokkaðar (Kvale, 1996).

Við vettvangsathuganir í kennslustofunum tók ég þátt í kennslustundinni með því að ræða við nemendur um það sem þeir voru að gera og varð þannig í hlutverki kennara í kennslustundunum (Bogdan og Biklen, 1992). Þegar kennarinn stýrði umræðum fylgdist ég með viðbrögðum nemenda og leitaðist við að afla gagna sem hjálpuðu mér við að greina hvernig kennsla kennaranna hafði áhrif á það nám sem átti sér stað í skólastofunni. Frásagnir kennaranna í viðtölunum og meginþemu sem þar komu fram hjálpuðu mér við að skipuleggja athugunina og beina sjónum að þáttum sem mikilvægt var að fá upplýsingar um (Spradley, 1980).

Við rannsóknarferlið hafði ég í huga að við menntarannsóknir er mikilvægt að taka tillit til þeirrar þróunar sem á sér stað á vettvangi. Rannsóknaraðferðir verða að mynda tengsl við það náms- og kennsluferli sem mótast hefur af menningu og aðstæðum innan þeirra stofnana þar sem rannsóknin fer fram (Artigue, 2009). Við rannsóknir á skólastarfi hefur áherslan undanfarin ár færst frá því að skoða tengsl milli kennslu og árangurs af skólastarfi yfir í að greina það ferli sem á sér stað í kennslustofunni. Kennarar eru í meira mæli þátttakendur í rannsóknum á skólastarfi í dag en þeir voru á síðari hluta 20. aldar þegar algengara var að rannsækendur kæmu utan frá og túlkuðu það sem þeir sáu (Dawson, 1999; Sfarid 2005).

Rannsóknir undanfarinna áratuga á kennaramenntun gefa viðamiklar upplýsingar um leiðir við þróunarstarf í skólum. Samt sem áður höfum við ekki fundið leiðir til að mennta kennara sem tryggja að þeir ráði við það flókna ferli að þróast sem stærðfræðikennarar

(Wood & Berry, 2003). Í nýjasta hefti tímaritsins *Journal of Mathematics Teacher Education* var sérstök umfjöllun um þróun stærðfræðikennara og stærðfræðimenntunarkennara þar sem fræðilegum gleraugum er beitt til að greina þróun undanfarinna áratuga. Þar leggja ritstjórnir áherslu á mikilvægi þess að skoða stærðfræðináms- og -kennslu og þróun kennara í starfi frá ólíkum sjónarhornum og að afla reynslu sem víðast að úr heiminum (Brown og Coles 2010). Þær upplýsingar sem aflað hefur verið með þessari rannsókn bæta við þann þekkingarbrunn og geta vonandi nýst þeim sem standa að menntun stærðfræðikennara.

Niðurstöður

Við greiningu á gögnunum kom fljótlega í ljós að fjögur meginþemu voru ríkjandi í viðtölunum og birtust einnig í vettvangsathugunum. Það sem virtist efst í huga kennara og kom víða fram í viðtölunum var áhersla þeirra á nám barnanna og hvernig þeir nýttu sér þekkingu sína á stærðfræðinámi og -kennslu í starfi sínu. Þá voru kennsluaðferðirnar þeim hugleiknar enda voru þeir að þróa nýjar leiðir í kennslu og þannig feta nýjar slóðir í starfi sínu. Fagleg umræða þeirra var rauður þráður í öllum viðtölunum og hafði hún að mati þeirra mótandi áhrif á hvernig kennsla þeirra þróaðist og skilning þeirra á því námi sem fram fór í skólaflokkum þeirra. Þá voru viðhorf foreldra og samstarf við þá þeim ofarlega í huga og kom fram í viðtölunum hve mikilvægt er að kynna vel fyrir foreldrum hvernig kennsla fer fram og hvernig börn þeirra læra stærðfræði. Hér verður gerð grein fyrir hvernig þessir þættir endurspegluðust í viðtölum og vettvangsathugunum.

Þekking kennaranna á stærðfræðinámi barna nýttist við greiningu á námi nemenda þeirra

Í upphafi samstarfsins kenndu allir kennararnir börnum í fyrsta bekk. Þær Björk og Íris sem höfðu sótt námskeiðið, um stærðfræðikennslu byggða á skilningi barna, voru mjög áhugasamar um að reyna í kennslu það sem þær höfðu kynnst þar. Þær spurðu börnin spurninga í tengslum við starfið í skólanum sem hvöttu þau til stærðfræðilegrar hugsunar. Margar þrautir urðu til í tengslum við kaup barnanna á mjólk í skólanum og mjólkurmiðum sem þurfti að afhenda til að fá hana. Þegar þær sömdu þrautir um mjólkurmiðana byggðu þær á því sem þær höfðu kynnst á námskeiðinu um hvernig kennarinn getur stutt við þróun skilnings barna við reikning með því að leggja fyrir þrautir sem hvetja börnin til að beita stærðfræðilegri hugsun.

Á samstarfsfundum kennaranna í árganginum sögðu þær Íris og Björk svo frá því hvernig börnin brugðust við þeim þrautum sem þær lögðu fyrir og hvernig þær sáu börnin þroskast í glímunni við stærðfræðina. Samkennarar þeirra smituðust af áhuga þeirra og fóru að leggja svipaðar þrautir fyrir nemendum sína. Smám saman varð áhuginn svo mikill að kennararnir ræddu saman um lausnaleyðir barnanna í öllum lausum stundum. Þar leiddu Íris og Björk umræðuna og studdu hinar með því að segja þeim frá reynslu sinni og kynna fyrir þeim það sem þær lærðu á námskeiðinu.

Ég var kannski búin að spá meira í, horfa á lausnaleyðirnar og sökkva mér ofan í stigin sem þau fara í gegnum. Ég var líka farin að kynna þetta á námskeiðum í skólanum. Ég sá hvernig þetta gerðist eins hjá mínum nemendum, þessi yfirfærsla af hlutbundnu stigi yfir í að skrá þetta skref fyrir skref og svo hélt þróunin áfram (Björk).

Umræða um hæfni nemenda til að byggja upp eigin þekkingu var meginþráðurinn í umræðum þeirra. Þegar börnin eltust tókust kennararnir á um það hvort kenna ætti ákveðnar aðferðir, hefðbundin reiknirit, við útreikninga eða treysta því að börnin gætu þróað sínar eigin leiðir við útreikninga.

Það komu tímar sem við höfðum áhyggjur af því hvort við værum á réttri leið. Það var frádrátturinn og deilingin. Þá fundum við hve mikilvægur stuðningur hinna var (Íris).

Þegar náíð samstarf þeirra fjögurra var ekki lengur til staðar fundu þær Sara og Tinna fyrir því að þær söknuðu umræðunnar við Björk og Írisi um nám barnanna.

Ég finn að ég nota ekki eins mikið þessa nálgun, ég eyði of litlum tíma í að láta þau útskýra fyrir hinum. Það var allt annað umhverfi áður, það var bara komið í svo góðan farveg einhvern veginn að það varð svo mikil umræða í bekknum. Það hefur ekki náðst hérna (Sara).

Ég naut svo góðs af því í stærðfræðikennslunni að vera í þessum hópi sem alltaf tók á því hvernig maður myndi leggja fyrir og hvernig þau unnu úr. Mig vantar það núna. Mér fannst ég skynja miklu betur hvar þau voru stödd, það var svo miklu stærðfræðilegri þankagangur ríkajandi, þegar við vorum alltaf að skoða saman (allur bekkurinn) eitthvert tiltekið verkefni (Tinna).

Björk sagði endurtekið frá því að hún hefði aldrei verið á því að gefast upp fyrir því að treysta á að nemendur hennar gætu þróað eigin leiðir við reikning. Hinar voru ekki alltaf eins öruggar sérstaklega þegar kom að frádrætti, margföldun og deilingu.

Þegar ég heimsótti Björk í kennslustund voru nemendur hennar í 7. bekk að byrja á verkefni sem er í námsefninu þeirra. Verkefnið fólst í að gera tillögur að fiskabúrum í þremur mismunandi stærðum, 20, 30 og 60 lítra og koma með þrjár tillögur að lögum fyrir hverja stærð.

Björk byrjaði á að vísa til rannsókna þeirra á á rúmmáli í síðustu viku og spurði nemendur um hvað þeir vissu um rúmmál. Einn nemandi sagði að ef við vissum hvað hliðarnar væru langar þá gætum við fundið rúmmálið og annar sagði að ef við þekktum rúmmálið þá gætum við fundið hliðarnar. Björk spurði þá hvort þeir væru að vísa til réttstrendinga eins og þeir voru að skoða um daginn, lyfti upp kassa sem lá á kennaraborðinu, bað um hjálp við að rifja upp hvernig hægt væri að finna rúmmálið og skráði tillögur nemenda á töfluna.

Hún bað börnin að fletta upp í vinnubókum sínum og skoða það sem þau höfðu skrifað hjá sér við rannsóknir sínar á safapökkum. Ein stelpan rifjaði upp að þau hefðu fundið út að einn lítri tæki 1000 cm^3 og strákur bætti við að $\frac{1}{4}$ lítri væri 250 ml en pappafernan væri bara 240 cm^3 . Björk spurði hvort þau myndu öll eftir þessu og hvernig gæti staðið á þessu. Önnur stelpan sagði að það væri vegna þess að pakkningin tútnaði út þegar vökvinn er kominn í hana og því þurfi hún að vera aðeins minni.

Viðhorf Bjarkar til nemenda koma skýrt í ljós í kennslu hennar þar sem hún vísar til fyrri reynslu nemenda og kallar eftir hugmyndum þeirra og þekkingu sem nýtist þeim við lausn verkefnisins en gefur engin fyriræli um hvernig eigi að leysa það. Hún sagðist vita að þó svo að nemendur hennar hefðu rannsakað rúmmál á ólíka vegu þá hefðu sumir þeirra ennþá aðeins óljósa hugmynd um hvernig finna má rúmmál hluta og líka hve mikið rými þyrfti fyrir gefið magn af vökva. Hún taldi mikilvægt að þeir nemendur sem ekki hefðu náð þessum skilningi fengju að rannsaka hluti og hvatti þá til að mæla pappakassa áður en þeir byrjuðu á verkefninu. Hún gaf líka þeim sem öðlast höfðu þennan skilning tækifæri til að útskýra hann fyrir bekkjarfélögum sínum.

Þróun nýrra kennsluhátta

Sérkennari skólans var áður í nánú samstarfi við kennarana og kom oft inn sem fimmti kennarinn og var þá árgangnum skipt í fimm hópa. Bekkirnir voru allir á sama svæði í skólanum og því auðvelt að skipuleggja samstarf milli þeirra. Gerðar voru tilraunir með ólíkar hópSKIPTINGAR svo sem tilviljunarkennt, eftir kyni eða námsgetu.

Við blönduðum nemendum stundum á milli bekkja og skiptum í mismunandi hópa. Við kynntumst þá öllum nemendum í árganginum og þeir lærðu að vinna með okkur og öllum hinum nemendum í árganginum (Sara).

Þegar ég heimsótti Söru í 6. bekkinn hennar voru nemendur að leysa verkefni um þríhyrninga í námsefninu.

Nemendur unnu saman í hópum og teiknuðu þríhyrningana á stórt blað. Sara gekk á milli og ræddi við einstaka nemendur og hópa. Hún bað börnin nokkrum sinnum um að staldra við og ræða saman um vandamál sem hún sá að einstakir nemendur stóðu frammi fyrir. Það sköpuðust lífligar umræður um rannsóknir þeirra og nemendur voru duglegir að styðja þá sem höfðu lent í vanda. Í lok kennslustundarinnar sagði Sara að í næsta tíma myndu allir kynna niðurstöður sínar.

Tveir nemendur tóku ekki þátt í þessari kennslustund og voru hjá sérkennara. Sara taldi að þeir myndu ekki hafa getað tekið þátt í þessari vinnu. Tveir aðrir nemendur sem venjulega fylgja ekki sama námsefni og hinir tóku þátt í vinnunni og gekk örðum þeirra vel en hinn dró sig fljótt út úr vinnunni og dró fram eigið námsefni.

Þegar kennslukonurnar unnu ekki lengur saman allar fjórar söknuðu þær samstarfsins og sameiginlegrar ígrundunar um kennslu sína.

Það sem ég sakna mest og ég veit að við söknum allar er að við vorum búnar að mynda svo mikið samfélag í kringum stærðfræðina, faglega umræðu og það næst ekki á sama hátt með nýjum samstarfsaðilum. Við tölum saman og skipuleggjum vinnuna eða það er meira um skipulag kennslunnar (Sara).

Við þróumst ekki sem kennarar á sama hátt og áður. Við erum alltaf að útskýra fyrir nýjum samstarfsaðilum. Þeir spyrja okkur stöðugt hvernig eigi að kenna og hvers vegna við kennum eins og við gerum. Við erum alltaf að útskýra það sama aftur og aftur (Íris).

Þegar ég kom í heimsókn til Írisar voru nemendur hennar að kynna niðurstöður rannsókna sinna um fiskabúrin sem nemendur Bjarkar voru að byrja á viku fyrr.

Hóparnir kynntu niðurstöður sínar upp við töflu. Þeir höfðu teiknað líkan af fiskabúrunum á blað af A3 stærð og útskýrðu svo útreikninga sína með því að skrifa á töfluna og teikna búrin í réttri stærð. Ég tók fljótt eftir að einn nemandinn bað oft um nánari útskýringar og spurði í hvaða hlutföllum myndirnar væru teiknaðar. Þegar kom að hópnum hans að kynna lausnir sínar sýndi félagi hans teikningar þeirra og sagði frá verkaskiptingu og vinnubrögðum og að þeir hefðu byrjað á 20 lítra búrinu. Sá spuruli útskýrði svo útreikninga þeirra og sagði að þeir hefðu byrjað á að finna allar tölur sem gengju upp í 20 þúsund því það hjálpaði þeim við að finna allar mögulegar gerðir af búrum. Margar hendur komu nú á loft og báðu nemendur hann að útskýra þetta nánar. Hann sagðist þá hafa þáttað töluna 20.000 og niðurstaðan var $2^5 \cdot 5^4$. Bekkjarfélagarnir sögðust ekki skilja útskýringar hans. Íris bauðst þá til að vera ritarinn hans og

Það hann um að útskýra hvert skref nákvæmlega. Hún teiknaði þáttatré á töfluna eftir fyrirmælum hans og hinir nemendur gátu nú fylgst með hugsun hans. Margir þeirra lýstu hrifningu sinni á þessari aðferð og sögðu að þetta hefði þeim ekki dottið í hug. Íris sagði þeim að það væri kafli í bókinni þeirra um þáttun og margir sögðust hlakka til að læra meira um hana.

Þegar ég spurði Írisi um þennan dreng sagði hún að stærðfræðileg hugsun hans væri mun þróaðri en hinna barnanna en hann ætti erfitt með samskipti við aðra. Hún taldi að hinir nemendurnir gætu lært margt af honum um stærðfræði og að hann græddi mikið á því að þurfa að eiga samskipti við þá. Hann nyti sín best þegar hann gæti rætt um stærðfræði.

Samstarf við foreldra var mikilvægur þáttur í faglegri þróun kennaranna

Samskipti við foreldra voru kennurunum ofarlega í huga. Það kom oft fram að sumir foreldrar höfðu efasemdir um vinnubrögð þeirra. Allt frá upphafi samstarfsins lögðu kennararnir áherslu á að kynna vinnubrögð sín fyrir foreldrum því þeir vissu að þeir voru að þróa kennsluhætti sem voru mörgum foreldrum ókunnugir. Það kom í hlut Bjarkar og Írisar að leiða umræðuna á foreldrafundum. Þær útskýrðu nákvæmlega hvernig börnin leystu þrautir og sýndu foreldrum vinnu barnanna.

Ég lenti í erfiðleikum með einn föður sem var alfarið á móti þessu, hann var verkfræðingur og vissi nú hvernig ætti að gera þetta. Á fundinum rétti hann svo upp hönd og mér leist ekki á blikuna. En þá hafði honum snúist hugur og var algjörlega sammála því sem við vorum að gera, bara eftir einn vetur. Hann lýsti því hvernig honum leið árið áður og síðan hafi hann farið að fylgjast betur með stráknum sínum og séð á honum hvað þetta var sem ég var að tala um og hvernig hann þroskaðist áfram og hvað hann réði við. Hann vissi greinilega hvað hann væri að gera og gæti útskýrt það. Svo voru þarna foreldrar sem voru að kynna sér námstækni og sögðu að við værum langt á undan öðrum kennurum í að þróa kennsluna okkar. Það væri þess vegna sem við fengjum þessa gagnrýni.

Tinnu fannst erfitt að umbera gagnrýni foreldra og þær kröfur sem þeir gerðu til skólans. Þegar hún tók við nýja nemendahópnum sínum voru krakkarnir vanir að fara á eigin hraða í námsefninu. Þegar Tinna ætlaði að vinna sömu verkefni með öllum nemendahópnum fékk hún kvartanir frá foreldrum.

Mér fannst að þessi tíu ár sem við unnum saman þá tókst okkur að halda utan um heilan bekk. Okkur tókst að fá alla til að vinna við sömu verkefni, ræða saman og hlusta á hver annan. Maður upplifði ekki að maður væri að halda neitt aftur af duglegukrökkunum því þeir fengu kannski að leiða umræðuna og fengu líka viðbótarverkefni eða þyngri tölur, maður hafði ýmis úrræði. En mér finnst að eftir að þessu tímabili lauk þá hafi maður misst svolítið tókin (Tinna).

Þegar ég heimsótti Tinnu í kennslustund í 6. bekk voru nemendur hennar að reikna brotadæmi.

Nemendur unnu hver fyrir sig en ræddu stundum við þá sem sátu við sama borð. Það voru allir að vinna verkefni í sama kafla í námsbókinni en þó á mismunandi stöðum. Tinna gekk um stofuna og ræddi við nemendur. Einn nemandi kvartaði yfir að sessunautur hans hermdi eftir því sem hann væri að gera og Tinna settist hjá þeim og leiðbeindi þeim um hvernig þeir gætu hjálpast að við námið. Hún bað nemendur nokkrum sinnum um að segja bekkjarfélögum sínum frá vandamálum sem þeir voru að glíma við. Þar sem þeir voru að

leysa mismunandi verkefni voru vandamál þeirra af ólíkum toga en Tinna benti þeim á hvað þeir gætu lært af vandamálum annarra.

Í samtali við Tinnu eftir kennslustundina kom fram að hún hafi áttað sig á því að þar sem nemendur voru allir að vinna að svipuðum verkefnum þá hefði hún getað skipulagt kennslustundina öðru vísi. Ef allir hefðu verið að vinna að sama verkefni hefðu umræðurnar verið gagnlegri og nemendur hefðu getað lært meira hver af öðrum. Það var það sem hún var von að gera þegar hún var í nánu samstarfi við hina kennarana. Hún fann fyrir svo miklum þrýstingi frá foreldrum um að nemendur fengju að leysa verkefni í náms-efninu hver á sínum hraða að það væri svo sjaldan hægt að hafa sameiginlegar umræður í bekknum. Hún var ekki sátt við vinnubrögð sín og sagði frá tveimur kennslustundum þar sem hún hafði náð sameiginlegri umræðu um stærðfræði sem spratt af áhugamálum nemenda og hún óskaði að að hún hefði fleiri tækifæri til slíkrar umræðu.

Fagleg umræða og samstarf hafði mótandi áhrif á starf kennaranna

Kennararnir lögðu allir áherslu á að samstarf þeirra og fagleg umræða hefði styrkt þær í kennslunni.

Samræðurnar voru uppbyggilegar. Við höfðum ólíkan bakgrunn og ólíkar skoðanir en okkur tókst alltaf að vinna þétt saman. Við tókum allar þátt í samræðunni en vorum samt ekki alltaf sammála (Sara).

Við ræddum allt, hvernig við unnum með einstaka nemendum og hvernig þeir unnu, hvað þeir gerðu og hvernig þeir hugsuðu. Við vorum miklu meðvitaðri um hugsun þeirra en áður. Ég græddi mikið á umræðunni um stærðfræðikennslu í þessum hópi. Við ræddum alltaf um skoðanir okkar. Umræðurnar um stærðfræðikennsluna höfðu áhrif á móðurmálskennslu mína (Tinna).

Sara og Tinna söknuðu báðar faglegu umræðunnar við Björk og Írisi. Þeim fannst núna erfitt að vinna með öllum nemendum að sömu stærðfræðiverkefnum og sumir nemendur þeirra voru alltaf hjá sérkennara í stærðfræðitímum og fylgdust því ekki með því sem bekkjarfélagarnir gerðu. Báðar óskuðu þess að þær gætu unnið á sama hátt og fyrr með öllum nemendum en fundu fyrir miklum þrýstingi frá foreldrum sem fannst þær vera að halda aftur af börnum þeirra ef þau fengju ekki að vinna verkefni í námsefninu á eigin hraða.

Við ræddum hvernig gekk hjá okkur, hvað skeði skemmtilegt og hvernig nemendur leystu verkefni á mismunandi hátt. Við vorum alltaf að ræða stærðfræði á fundum okkar (Björk).

Ég held að við höfum grætt svo mikið á samstarfinu því við ræddum alltaf saman þó svo að við værum ekki alltaf sammála og samstíga í því sem við vorum að gera. Kannski hafði einhver rekist á sama vandamál og við græddum á að ræða það (Íris).

Íris og Björk voru báðar ánægðar með kennslu sína og samstarf hvor við aðra en söknuðu samvinnunnar við Söru og Tinnu. Þær telja mikilvægt að allir nemendur fái að taka þátt í stærðfræðikennslustundum að og þeim takist vel að láta alla nemendur njóta sín á eigin forsendum. Þær telja mikilvægt að eiga gott samstarf við foreldra og hafa lagt sig eftir að styrkja það.

Samstarf kennaranna hafði áhrif á starf margra annara kennara í skólanum sem líka hafa endurskoðað kennsluhætti sína í stærðfræði. Íris og Björk aðstoðuðu aðra kennara við

kennslu sína og héldu námskeið fyrir kennara um stærðfræðinám barna. Sumir kennaranna voru gagnrýnir á kennsluhætti þeirra og þær fengu oft meinlegar athugasemdir um vinnubrögð sín. Þær töldu að þetta hafi stafað af því að margir kennar öfunduðu þær af að ná að vinna svona náði saman og að það hefði oft verið reynt að stífa þeim í sundur í stað þess að styrkja þær í samstarfinu. Nemendur þeirra stóðu sig alltaf vel á samræmdum könnunarprófum og voru einkunnir þeirra langt yfir landsmeðaltali. Skólustjórnendur fögnuðu þessu og fundu þær þá fyrir að sumum samkennurum fannst þeim hampað of mikið.

Umræða

Í niðurstöðunum kemur fram að áralangt samstarf kennaranna hefur haft mótandi áhrif á kennslu þeirra. Kveikjan að strafspróun þeirra var að tvær þeirra sóttu námskeið sem hafði áhrif á viðhorf þeirra og hvatti þær til að gefa námi nemenda og þróun stærðfræðilegrar hugsunar þeirra meiri gaum en áður. Kennslukonurnar sýndu að þær gera sér góða grein fyrir að nemendur þeirra læra á ólíkan hátt og að þeir geta verið að læra ólíka hluti þótt þeir séu að leysa sama verkefnið. Þær hvöttu nemendur sína stöðugt til að rannsaka hluti til að skilja viðfangsefnið betur og brugðust við sterkum og veikum hliðum nemenda með því að hvetja þá til að skýra hver fyrir öðrum og leyfa þeim að njóta sín á eigin forsendum. Þær lögðu því áherslu á hugtakaskilning og sveigjanleg vinnubrögð.

Í vettvangsathugunum kom í ljós að umræða þeirra og ígrundun um kennsluna og nám nemenda þeirra hefur gert þær að góðum fagmönnum sem skapa það umhverfi í skólastofu sem hvetur til náms sem Hiebert o.fl. (1997) leggja áherslu á. Í niðurstöðum rannsókna á starfi kennara sem tóku þátt í námskeiðum um stærðfræðikennslu byggða á skilningi barna, líkt og þær Björk og Íris, kemur fram að ein af meginleiðunum til að bæta stærðfræðikennslu er að hjálpa kennurum að skilja stærðfræðilega hugsun nemenda sinna. Það er líka ljóst að þessi þekking er ekki óumbreytanleg og hún lærist ekki eingöngu á námskeiðum utan kennslustofunnar. Hún er breytingum háð og stöðugt vaxandi og hana er sennilega eingöngu hægt að öðlast í tengslum við að kenna stærðfræði (Fennema o.fl. 1996). Þessi lýsing á vel við þær Írisi og Björk eins og fleiri kennara sem þátt tóku í námskeiðinu.

Til að geta átt faglega umræðu um kennslu þarf að hafa þekkingu á námi og kennslu og þar liggur styrkur kennaranna. Það kom í ljós að þegar Sara og Tinna höfðu ekki lengur stuðning af samstarfinu við Björk og Írisi sem höfðu aflað sér sérstakrar þekkingar um stærðfræðinám barna þá fundu þær til vanmáttar síns sérstaklega hvað varðaði það að gefa öllum nemendum sínum tækifæri til að vinna saman við stærðfræðinámið hver á sínum forsendum. Þær fundu líka til vanmáttar síns við að rökstyðja vinnubrögð sín bæði fyrir samkennurum sínum og foreldrum. Þær Björk og Íris sýndu að þær unnu markvisst að því að hjálpa öllum nemendum til að læra á eigin forsendum og nýttu sér faglega þekkingu til að styðja þá við námið.

Moore (2005) bendir á að yfirfærsla fræðilegrar þekkingar kennarans gerist ekki af sjálfu sér. Hún leggur áherslu á að til þess að kennarar verði færir um að kenna öllum nemendum sínum stærðfræði til skilnings þurfi þeir að þróa þekkingu sína á námi barna. Þeir þurfa líka að öðlast reynslu af að glíma við stærðfræði í sams konar umhverfi og þeim er ætlað að skapa í kennslustofu sinni. Þær Björk og Íris hafa lagt sig eftir að sækja námskeið og ráðstefnur þar sem þær hafa fengið tækifæri til þess og það hefur greinilega styrkt þær við kennsluna. Þær hafa líka kennt öðrum kennurum utan skólans og innan og Björk skrifaði grein um samstarf þeirra í tímarit stærðfræðikennara (Kristjana Skúladóttir, 2009). Þau vinnubrögð sem þær þróuðu voru um margt ólík viðteknum venjum í skólum landsins þegar þær hófu þróunarstarf sitt. Það er mikilvægt að kynna það sem vel er gert í skólum og frumkvæði þeirra kennara sem hér hefur verið sagt frá getur vonnadi orðið

öðrum kennurum hvatning til að taka höndum saman um að rannsaka kennsluhætti sína og styrkja sig sem stærðfræðikennarar.

Heimildir

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. Í C. Winsløw (ritstjóri), *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings of NORMA08* (bls. 7–16). Rotterdam: Sense Publishers.

Bogdan, R. C. og Biklen, S. C. (1992). *Qualitative research for education* (2. útg.). Boston: Allyn and Bacon.

Bredcamp, S. (2004). Standards for preschool and kindergarten mathematics education. Í D. H. Clements og J. Samara (ritstjórar), *Engaging young children in mathematics* (bls. 77–82), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Brown, L. og Coles, A. (2010). Mathematics teacher and mathematics teacher educator change — insight through theoretical perspectives. *Journal of Mathematics Teacher Education* 13, 375–382.

Carpenter, T. P., Fennema, E., og Franke, M. L. (1995). *Children's thinking about whole numbers*. Madison: University of Wisconsin-Madison, Wisconsin Centre for Education Research.

Cooney, T. J. og Shealy, B. (1997). On understanding the structure of teachers beliefs and their relationships of change. Í E. Fennema og B. S. Nelson (ritstjórar), *Mathematics teachers in transition* (bls. 87–109). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dawson, S. (1999). Charting a historical perspective. Í B. Jaworski, T. Wood, og S. Dawson (ritstjórar), *Mathematics' teacher education. Critical international perspectives* bls.7–13. London, Falmer Press.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R. og Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education* 27, 403–434.

Goldsmith, L. og Schifter, D. (1997). Understanding teachers in transition: Characteristics of a model for developing teachers. Í E. Fennema og B. S. Nelson (ritstjórar), *Mathematics teachers in transition* (bls. 19–54). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir. (2010). Mathematics teacher education in Iceland University of Education. Recent development of mathematics education courses. Í B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Pálsdóttir, B. D. Søndergaard og L. Haapasalo (ritstjórar), *The sourcebook on Nordic research in mathematics education* (bls. 495–504). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Guðrún Angantýsdóttir. (2010). Professional development: How did teachers' participation in the professional development program influence their teaching practices? Í B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Pálsdóttir, B. D. Søndergaard og L. Haapasalo (ritstjórar), *The sourcebook on Nordic research in mathematics education* (bls. 495–504). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hafdís Guðjónsdóttir og Jónína Vala Kristinsdóttir. (2006). Teaching all children mathematics: How self-study made a difference. Í D. Tidwell og L. Fitzgerald (ritstjórar), *Self-study and diversity* (bls. 195–212). Rotterdam: Sense Publishers.

Hafðís Guðjónsdóttir, Jónína Vala Kristinsdóttir og Edda Óskarsdóttir, 2010. Developing team teaching through self-study. Í B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Pálsdóttir, B. D. Søndergaard og L. Haapasalo (ritstjórar), *The sourcebook on Nordic research in mathematics education* (bls. 479–486). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Oliver, A. og Human, P. (1997). *Making sense. Teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth NH: Heinemann.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T., Levi, L., og Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 258–288.

Jónína Vala Kristinsdóttir. (2006). Rannsókn kennara á eigin kennslu á yngsta stigi grunnskóla. *Uppeldi og menntun* 15(3), 43–64.

Katrín Friðriksdóttir og Sigrún Aðalbjarnardóttir. (2010). Relating life story and pedagogical vision: A teacher's voice. Í B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Pálsdóttir, B. D. Søndergaard og L. Haapasalo (ritstjórar), *The sourcebook on Nordic research in mathematics education* (bls. 495–504). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kompetancer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18. (2002). Kaupmannahöfn: Undervisningsministeriet. Sótt 16. nóvember af <http://nyfaelighed.emu.dk/kom/>

Kristín Bjarnadóttir. (2003). Menntun stærðfræðikennara, námsmat og stærðfræðileg hæfni. *Netla-Veftímarit um uppeldi og menntun*. Sótt 16. nóvember af <http://netla.khi.is/greinar/2003/009/index.htm>

Kristjana Skúladóttir. 2009. Gaman, gaman - samvinna kennara og breyttir kennsluhættir. *Flatarmál, tímarit samtaka stærðfræðikennara*, 16(2), 29–31.

Kvale, S. (1996). *Interviews. An introduction to qualitative research interviewing*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Lewis, C., Perry, R., og Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of lesson study. *Educational Researcher*, 35(3), 3–14.

Margrét Vala Gylfadóttir. (2004). Viðhorf íslenskra kennara til stærðfræði, stærðfræðináms og stærðfræðikennslu. *Flatarmál, tímarit samtaka stærðfræðikennara*, 11(1), 10–16.

Menntamálaráðuneytið. (2007). *Aðalnámskrá grunnskóla, stærðfræði*. Reykjavík: Menntamálaráðuneytið.

Moore, J. (2005). Transformative mathematics pedagogy: From theory to practice, research, and beyond. Í A. J. Rodriguez og R. S. Kitchen (ritstjórar), *Preparing mathematics and science teachers for diverse classrooms* (bls. 183–202). Mahaw, New Jersey: Lawrence Erlbaum

Nelson, B. S. (1997). Learning about teacher change in the context of mathematics reform: Where have we come from? Í E. Fennema og B. S. Nelson (ritstjórar), *Mathematics teachers in transition* (bls. 19–54). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard A. (2005). What could be more practical than good research? *Educational Studies in Mathematics*, 53, 393–413.

Spradley, J. P. (1980). *Participant observation*. Orlando: Harcourt Brace Jovanovich.

Stigler, J. W., og Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: The Free Press.

Wood. T. og Berry, B. (2003). What does “design research” offer mathematics teacher education? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 195–199.



Jónína Vala Kristinsdóttir. (2010).

Samfélag kennara sem hvetur til ígrundunar um nám barna: Rannsókn á þróun stærðfræðikennslu á miðstigi grunnskóla. *Ráðstefnurit Netlu – Menntakvika 2010*. Menntavísindasvið Háskóla Íslands.

Sótt af <http://netla.khi.is/menntakvika2010/018.pdf>